KATEDRA
INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Frekvenční doména

Počítačová grafika

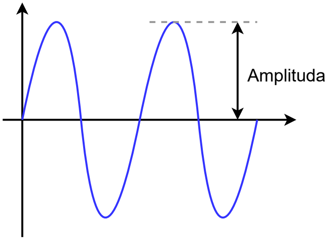
Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Reprezentace obrazu

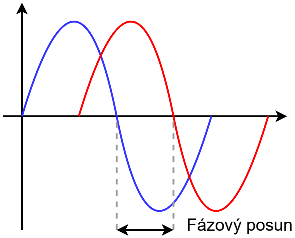
- **Prostorová doména**:
  - obrazová funkce $f(x, y)$
  - jak se daná funkce mění v čase
- **Frekvenční doména**:
  - obraz popsán sinusovými signály
  - kolik signálu leží v každém frekvenčním pásmu v rozsahu frekvencí

Frekvenční doména

- **Amplituda** – určuje velikost jednotlivých složek
- **Fáze** – popisuje vztah mezi časem a okamžitou výchylkou
- **Frekvence** – udává počet opakování periodického děje za daný časový úsek



Amplituda



Fázový posun

Frekvenční doména

- **Šum** – vysoké frekvence
- **Alias** – nežádoucí nízkofrekvenční signál

- Přechod mezi doménami – (zpětná) Fourierova transformace
- **Rychlá Fourierova transformace** – časová složitost $M \cdot N \cdot log(M \cdot N)$

Spojitá Fourierova transformace

- spojitá funkce $f(x)$
- **Dopředná Fourierova transformace**:
  $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$
- **Eulerova formule** – $e^{-i2\pi ux}$
  $e^{-i2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux)$
- $F(u)$ – Fourierův obraz
- **Zpětná Fourierova transformace**:
  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$
- $F(u) = R(u) + iI(u)$ – reálná část $R(u)$, imaginární část $I(u)$
- Vyjádření pomocí amplitudy a fáze – $F(u) = |F(u)| \cdot e^{i\varphi(u)}$
- **Amplituda** (modul) – $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$
- **Fázový posun** – $\varphi(u) = tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$
- **Fourierovo spektrum** – $P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$

Spojitá Fourierova transformace

- spojitá funkce $f(x, y)$
- **Dopředná Fourierova transformace**:
  $F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dxdy$
- **Zpětná Fourierova transformace**:
  $f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{+i2\pi(ux+vy)} dudv$

Diskrétní Fourierova transformace

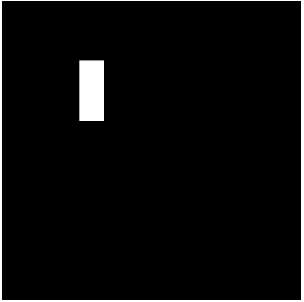
- diskrétní funkce $f(x)$
- posloupnost vzorků ($x \in \{0, \ldots, N-1\}$)
- $f(x)$ je periodická s periodou N
- **Dopředná Fourierova transformace**:
  $F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{N}}$
- $u \in \{0, \ldots, N-1\}$
- **Zpětná Fourierova transformace**:
  $f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{+i2\pi \frac{ux}{N}}$

Diskrétní Fourierova transformace

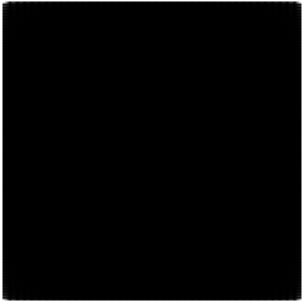
- diskrétní (obrazová) funkce $f(x, y)$
- posloupnost vzorků ($x \in \{0, \dots, M-1\}$, $y \in \{0, \dots, N-1\}$)
- $f(x, y)$ je periodická s periodou $M \times N$
- **Dopředná Fourierova transformace**:
  $F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$
- **Frekvenční proměnné**: $u \in \{0, \dots, M-1\}$, $v \in \{0, \dots, N-1\}$
- **Frekvenční obdélník**: $M \times N$
- **Fourierovy koeficienty**: $F(u, v)$
- **Fourierovy koeficienty**: $F(u, v)$
- **dc komponenta**:$F(0, 0)$ – je rovna $M \cdot N$ násobku průměrní hodnoty $f(x, y)$
- Čím dále jsme od počátku (s rostoucím u a v) tím komponenta vyjadřuje prudší změnu v obraze
- **Zpětná Fourierova transformace**:
  $f(x, y) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{+i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$

Diskrétní Fourierova transformace

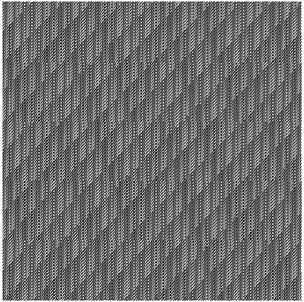
- **Fourierovo spektrum**: $|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$
- **Fázový úhel**: $\varphi(u) = tan^{-1}\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$



Obraz f



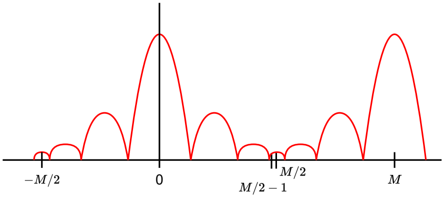
Spektrum



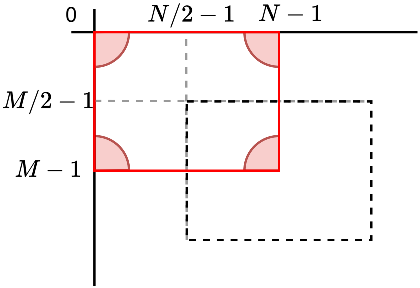
Fáze

Fourierův obraz

- $F(u)$ ($F(u,v)$) – symetrická podle počátku, periodická s periodou N ($M \times N$)
- Nejvyšší frekvence uprostřed:
  - vynásobení $f(x)$ hodnotou $(-1)^x$ před výpočtem transformace
  - počátek posunut do bodu $M/2$
  - vynásobení $f(x,y)$ hodnotou $(-1)^{x+y}$

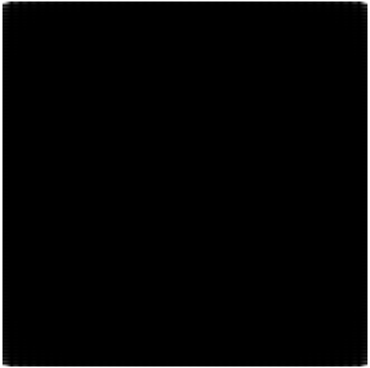


$F(u)$

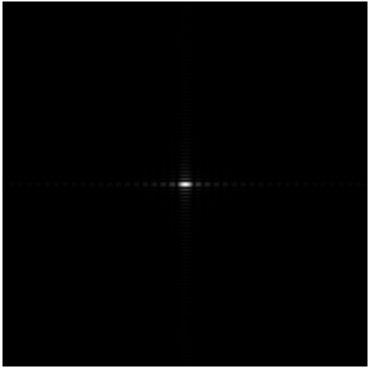


$F(u,v)$

Fourierovo spektrum



Necentrované



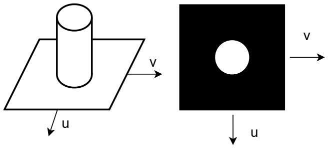
Centrované

Konvoluce

- **Prostorová doména**: $h(x,y) \star f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} h(s,t) f(x-s, y-t)$
- **Konvoluční maska**: $h(x,y)$
- $F(u,v)$ Fourierův obraz $f(x,y)$
- $H(u,v)$ funkce $h(x,y)$
- Fourierův obraz $h(x,y) \star f(x,y)$ – součin $H(u,v) \cdot F(u,v)$
- Obraz $H(u,v) \star F(u,v)$ – $h(x,y) \cdot f(x,y)$
- **Konvoluční teorém**
- **filter transfer function**: H(u,v)

Filtrování ve frekvenční doméně

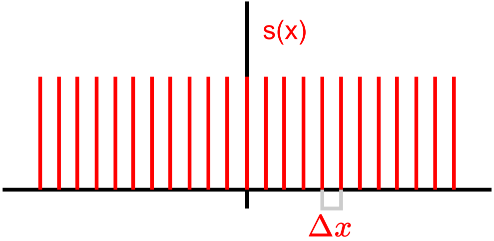
- úkolem je najít funkci $H(u, v)$
- **Low pass filtry** (LPF) – násobíme nízké frekvence a potlačujeme vysoké
  - **Příklad**: Ideální, Butterwothův, Gaussovský
  - vyhlazovací filtry
  - odstraňování šumu



- **High pass filtry** (HPF) – potlačujeme nízké frekvence
  - **Příklad**: Ideální, Butterwothův, Gaussovský
  - ostřící filtry
  - odstraníme i dc komponentu
  - HPF $=$ 1 - LPF

Vzorkování a konvoluce

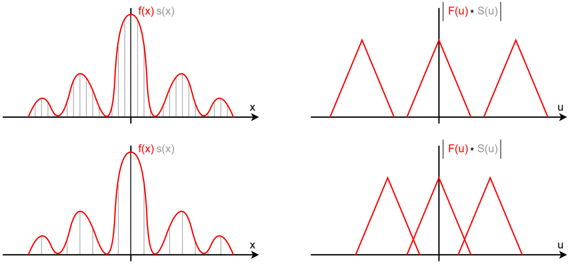
- Vzorkování v prostorové doméně = konvoluce ve frekvenční
- **Vzorkovací funkce**: $s(x)$



- $s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x)$
- nekonečná funkce Diracových pulzů $\delta(x)$, které jsou v konstantní vzdálenosti Δx

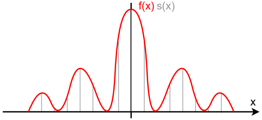
Vzorkování a konvoluce

- Vzorkování $f(x)$ vzorkovací funkcí $s(x)$
- $I(x) = f(x) \cdot s(x)$
- Obraz $I(x)$:
- $\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u-i}{\Delta x}\right)$
- Konovoluce $F(u)$ a $S(u)$ – obrazy funkce $f(x)$, které se opakují ve vzdálenosti Fourierových obrazů pulzů vzorkovací funkce $s(x)$

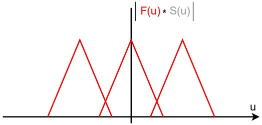


Prostorová doména Frekvenční doména

Vzorkování a konvoluce



Prostorová doména

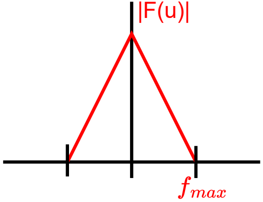


Frekvenční doména

- **Alias** – nechtěná informace

Alias

- **Frekvenčně omezená funkce**:
  - má konečné amplitudové spektrum
  - existuje nejvyšší frekvence f_{max} (**Nyquistovo kritérium**)
  - $\forall u > f_{max}$ je $|F(u)| = 0$



- Dostatečně velká frekvence:
  - minimálně dvojnásobkem frekvence f_{max}

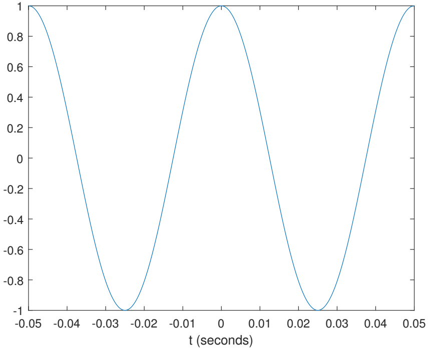
Shannonův vzorkovací teorém: Signál spojitý v čase je plně určen posloupností vzorků odebíraných ve stejných intervalech $\Delta x \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{\Delta x} > 2 \cdot f_{max}$.

Alias

- Každá frekvenčně omezená funkce je reprezentována od určité vzorkovací frekvence přesně a další zvětšování frekvence nevede k přidání detailu a tedy je zbytečná.
- Alias – originální funkce obsahuje detaily, které nemůžeme zobrazit v rastru
  - f není frekvenčně omezená
  - f je frekvenčně omezená, ale vzorkována pod Nyquistovým limitem

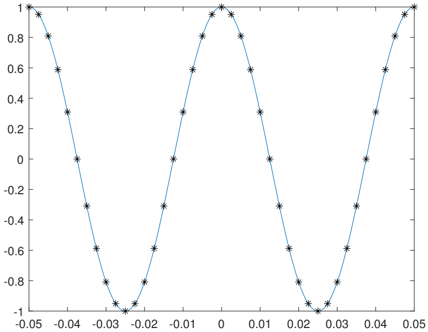
Alias – příklad

Frekvence je 20 Hz

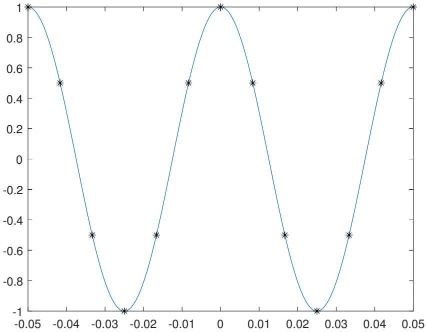


Alias – příklad

Vzorkování s větší frekvencí, než je $2 \cdot 20$



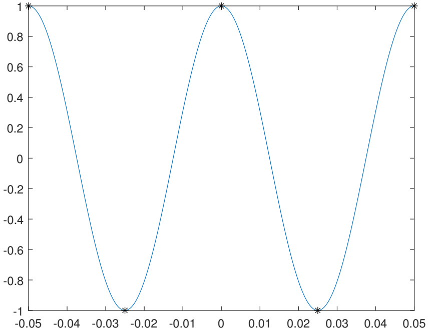
400 Hz



120 Hz

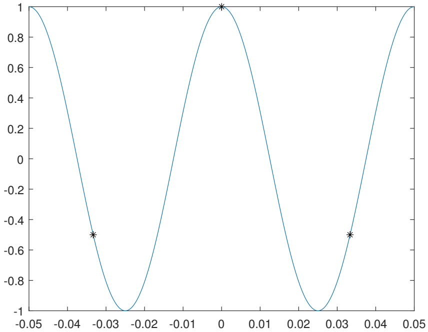
Alias – příklad

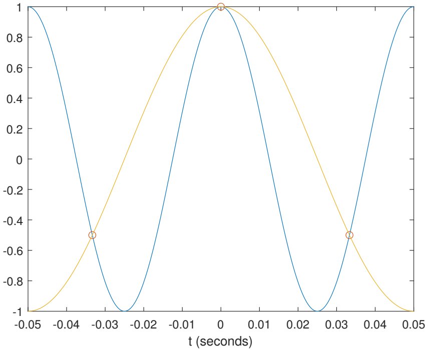
Vzorkování frekvencí rovnou $2 \cdot 20$



Alias – příklad

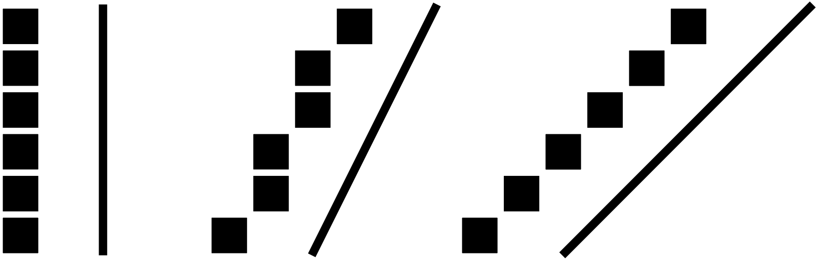
Vzorkování menší než $2 \cdot 20$ (30 Hz)



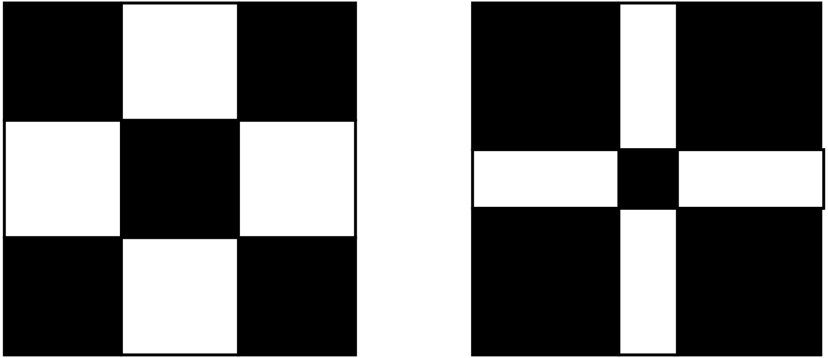


Výsledná funkce 10 Hz

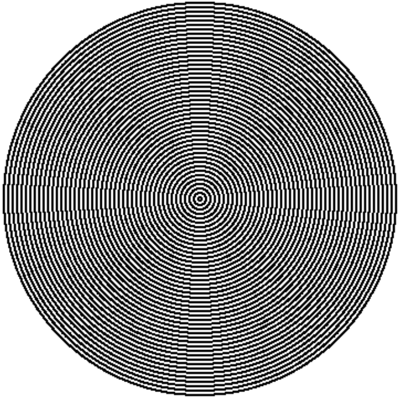
Příklady aliasu – Zubaté zobrazení čar (Jaggies)

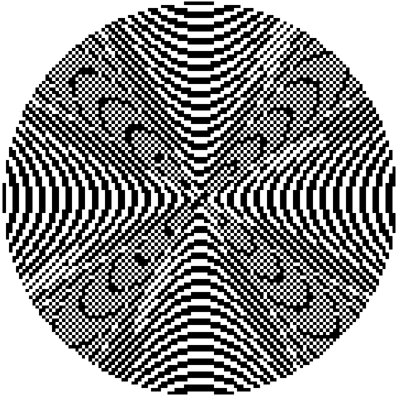


Příklady aliasu – Vzorkování šachovnice

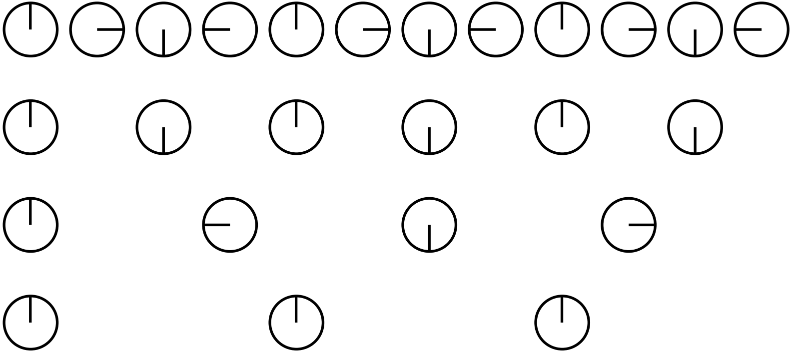


Příklady aliasu – Vzorkování pravidelného hustého vzoru – Moaré





Příklady aliasu – Časový alias

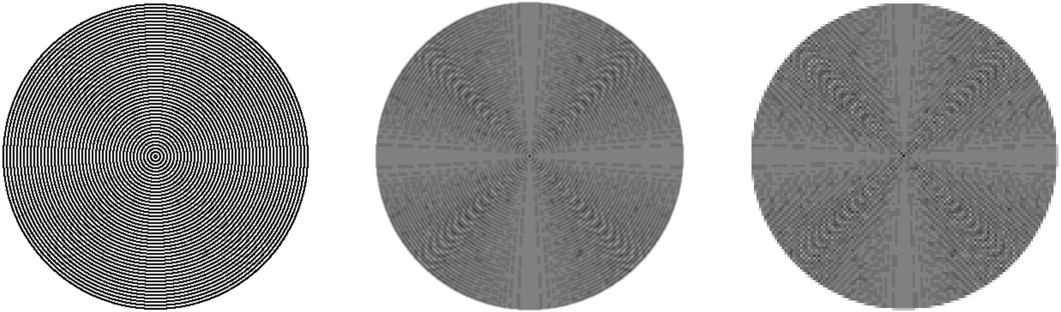


Potlačení aliasu

- **Antialiasing**:
  - odstranit z obrazu informaci, kterou není možné navzorkovat
  - upravit vzorkovací funkci

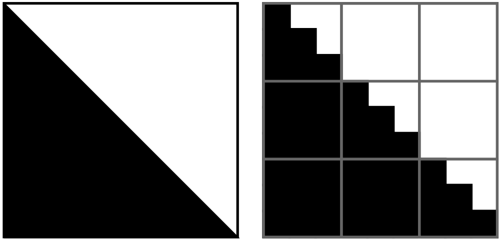
Potlačení aliasu – Odstranění informace

- odstranění vysokých frekvencí ve frekvenční doméně – frekvenčně omezená funkce
- Low pass filtry, vyhlazovací filtry



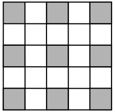
Potlačení aliasu – Supersampling

- **supersampling** = zvýšení vzorkovací frekvence – $n_x\times$ ve směru osy x a $n_y\times$ ve směru osy y
- **superpixely** – $n_x \times n_y$ pixelů
- vybereme m vzorků (pokud $m = n_x \cdot n_y$ – oversampling)
- vybrané vzorky: s_i, $i \in \{0, \dots, m-1\}$
- váhy: w_i, $i \in \{0, \dots, m-1\}$
- **downsampling**: superpixely nahrazeny jedním pixelem $\sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot s_i$

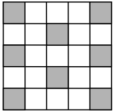


Výběr vzorků ze superpixelu

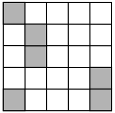
- **Pravidelné vzorkování**



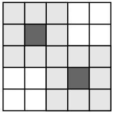
- **Rotovaná mřížka**



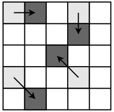
- **Náhodné vzorkování**



- **Poissonův disk**



- **Jittering** – roztřesení



- **Algoritmus n-věží**