



KATEDRA  
INFORMATIKY  
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

# Ray Tracing

## KMI/3DG

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

# Osvětlení scény

- Dopusud uvažované metody:
  - Pracovaly s jedním objektem
  - Nebraly v úvahu, že hodně lesklé objekty odráží světlo, které může ovlivnit osvětlení jiných objektů



- Ostatní objekty ve scéně braly v úvahu jen při řešení viditelnosti a řešení, zda zdroj osvětluje objekt nebo ne

# Osvětlení scény

- Dopusud uvažované metody:
  - Nebraly v úvahu, že poloprůhledné objekty mohou ovlivnit i tvar objektů za nimi – **refrakce**



# Zobrazovací rovnice

- **Zobrazovací rovnice** – matematická definice zobrazení scény
- Její řešení udává pro každý bod povrchu každé plochy a pro každý směr **radianci**
- Radiance opouštějící bod povrchu musí být někde odražena či absorbována
- Nepopisuje případ s opticky aktivním prostředím
- Řešení je příliš složité → aproximace
- Ne všechny metody řeší celou rovnici, jen některé její části
- $x$  . . . bod na povrchu, pro který chceme vyjádřit celkovou radianci  $L_o(x, \omega)$ , která bod opouští ve směru  $\omega$
- $x$  může být světelným zdrojem a vyzařovat radianci  $L_e(x, \omega)$
- $x$  může v daném směru přispívat odraženým světlem – to je dáno lokálním osvětlením dle BRDF

## Zobrazovací rovnice

- $L_o(x, \omega) = L_e(X, \omega) + \int_S f(x, x' \rightarrow x, \omega) L_i(x' \rightarrow x) V(x, x') G(x, x') dA$
- Pro výpočet radiance ve směru  $\omega$  z bodu  $x$  na nějaké ploše, musíme vzít v úvahu všechny ostatní plochy ve scéně
- Pro všechny jejich body  $x'$  vypočteme viditelnost bodu  $x$
- Je-li bod viditelný, vyjádříme geometrický člen (promítnutá radiance po vyzáření z bodu  $x'$  a po dopadu na  $x$ )
- Vynásobíme odcházející radianci tímto členem a také BRDF v bode  $x$
- **Výsledek** – integrál přes všechny plochy ve scéně solu s vlastní vyzářenou radiancí
- Pro výpočet rovnice pro bod  $x$  potřebujeme znát výsledek pro bod  $x'$ , ale ten je závislý na  $x$

# Zobrazovací rovnice

## Notace transportu světla

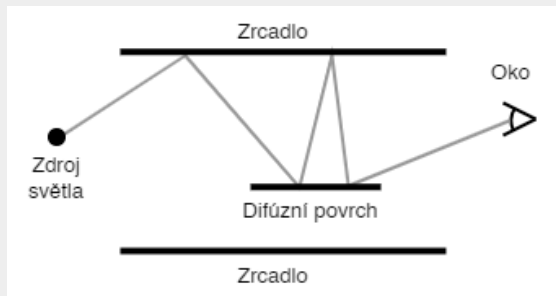
- $L$  ... světelný zdroj (light)
- $D$  ... odraz od difúzního povrchu (diffuse)
- $S$  ... odraz od zrcadlového povrchu (specular)
- $G$  ... odraz od lesklého povrchu (glossy)
- $E$  ... dopad paprsku do oka/kamery (eye)
- Kombinace různých odrazů a jejich varianty jsou popsány regulárními výrazy
- $(k)?$  žádný či jeden odraz
- $(k)+$  jeden či více odrazů
- $(k)*$  žádný či více odrazů
- $(k/q)$  cesta  $k$  nebo  $q$
- Paprsek jdoucí ze světla rovnou do oka –  $LE$
- Jednou zrcadlově odražený paprsek –  $LSE$
- Alespoň jednou difúzně odražený paprsek –  $LD + E$

# Zobrazovací rovnice

## Notace transportu světla

### Příklad

Pro následující obrázek popište cestu paprsku.



# Optické jevy

- Pro věrnost zobrazované scény jsou některé optické jevy důležitější než jiné
- **Přímé osvětlení** (direct illumination) – lokální osvětlovací model
- Simuluje světlo dopadající k pozorovateli po jednom odrazu (dráhy světla *LDE*, *LSE* a *LGE*)
- K jeho určení potřebujeme znát charakteristiku zdroje světla a BRDF povrchu objektu
- **Stín** (shadow) napomáhá prostorovému vjemu, uspořádání objektů ve scéně
- K jeho určení potřebujeme znát polohu i ostatních objektů ve scéně





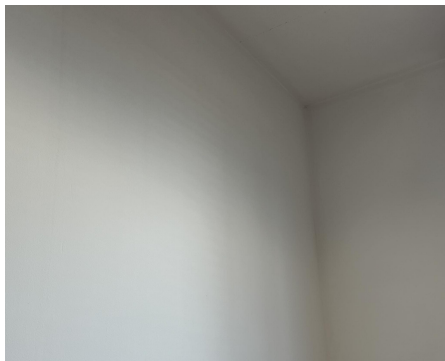
# Optické jevy

- **Násobné odrazy** způsobeny povrchy, které světlo odrážejí
- Dělíme je na zrcadlový nebo difúzní odraz, difúzní přenos barvy, kaustiky
- **Zrcadlový odraz** – projevuje se jako odlesky na plochách a jasné odrazy světla
- Jsou způsobeny hladkými materiály s vysokou odrazovostí
- $L(S + |G+)*E$



## Optické jevy

- **Difúzní nepřímý odraz** – z hlediska simulace je jedním časově nejnáročnějším jevem
- Projevuje se jako pomalá změna intenzity odrazu světla v rozích
- Zdi jsou většinou difúzní a jejich násobný odraz se projevuje v rozích
- V Phongově osvětlovacím modelu je aproximován konstantním ambientním členem
- Přesnější určení – radianční metoda



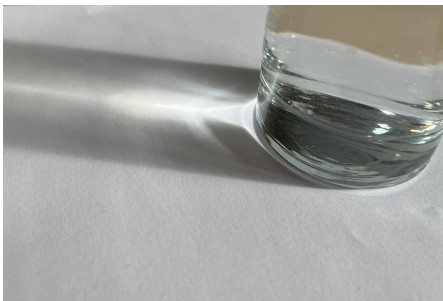
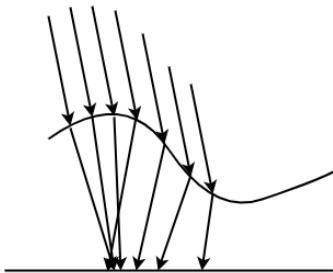
# Optické jevy

- **Difúzní přenos barvy** (color bleeding)
- Vzniká v těsné blízkosti dvou difúzních povrchů různé barvy
- Barva jednoho je emitována na druhý



# Optické jevy

- **Kaustiky** (prasátka) – vznikají při koncentraci paprsků odražených od zrcadlového materiálu či prošlých průhledným materiálem
- Modelují se metodou mapování fotonů
- Cesta paprsku může mít libovolný průběh, podstatné je, že na některém místě musí dojít ke koncentraci zrcadlových příspěvků a poslední odraz (před dopadem na kameru) nastává na difúzním (hrubém lesklém) povrchu



# Optické jevy

- **Opticky aktivní prostředí** (participating media)
- Nejsložitější případ transportu světla
- Viz dříve



# Globální osvětlovací techniky

- **Globální osvětlovací techniky** – hledají řešení zobrazovací rovnice
- Analytické řešení je nemožné, využívají se metody, které výpočet aproximují
- Nejčastěji se provádí náhodné simulace, jejich střední hodnota pak řešením
- **Monte Carlo metody**

# Světlo

- **Světlo** – kolekce paprsků, které začínají ve zdroji světla
- Ve světě (v prostoru scény) se odráží od objektů, které mění jejich směr a intenzitu
- My objekty vidíme, protože nakonec některé paprsky dopadnou na kameru (lidské oko)
- Při vykreslování scény tímto způsobem jsou paprsky sledovány od jejich zdroje, po celé trase scénou až dopadnou na pozorovatele (konkrétně na jeden z pixelů průmětny – obrazovky)
- Tento paprsek ovlivní (nebo určí) hodnotu pixelu
- **Metoda sledování paprsku** – Ray tracing
- Existuje i varianta, kde paprsky začínají u pozorovatele (prochází jedním pixelem do scény) a sbírají po své dráze informace pro následné určení barvy
- Případně kombinace obojího

# Světlo

- **Objekty** ve scéně nesou informaci o tom, jak je jejich povrch odrazivý, případně o refrakci
- Koeficient potřebný k výpočtu lokálního osvětlení
- Odrazivý koeficient – jak je povrch reflektivní
- Koeficient refrakce – jak je objekt průhledný
- Hodnoty jsou v rozsahu 0 a 1 a jejich součet je roven 1
- Čím má komponenta vyšší hodnotu, tím více ovlivňuje výsledný vzhled



# Metody vycházející od pozorovatele

- Sledujeme trajektorii světla od pozorovatele – **Zpětné sledování trajektorie světla**
- Tyto metody sbírají energii, kterou paprsek na své cestě akumuluje – **gathering methods**
- **Motivace:**
  - Větší část paprsků vyzářených zdrojem světla nedorazí po mnoha odrazech k pozorovateli
  - Je tedy výpočetně náročnější
- **Základní myšlenka algoritmu** – Z každého pixelu vedeme několik paprsků, počítáme jejich příspěvky, ze kterých vypočítáme výslednou barvu
- **Algoritmus**
  - 1 Pro všechny pixely – nastav barvu na barvu pozadí
  - 2 Pro  $n$  vzorků
    - 1 Vypočti paprsek jdoucí od pozorovatele pixelem do scény
    - 2 Barvu paprsku urči pomocí funkce SledujPaprsek
    - 3 Barva pixelu  $+$  = barva paprsku /  $n$
- Metody se vzájemně liší funkcí SledujPaprsek

# Metody vycházející od pozorovatele

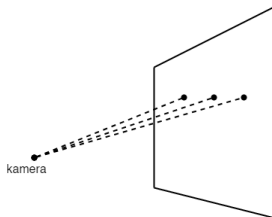
## Rekurzivní sledování paprsku

- **Rekurzivní metoda sledování paprsku** (ray tracing) – je to klasická metoda
- Více se této metodě budeme věnovat později, zde uvedeme jen princip v kontextu globálního osvětlení
- Není schopna vypočítat kompletní řešení zobrazovací rovnice – nepracuje s plošnými světelnými zdroji, neřeší difúzní přenos barvy, kaustiky
- Avšak existují rozšíření – např. distribuovaná metoda RT– které dokáží řešit kaustiky a plošné světelné zdroje

# Metody vycházející od pozorovatele

## Rekurzivní sledování paprsku

- Potřebujeme znát polohu pozorovatele (kamery) a pozici obrazovky (průmětny)
- **Počáteční (primární) paprsek** (primary ray) je určen pozicí pozorovatele a souřadnicí pixelu
- Tento paprsek postupuje scénou, kde může protnout nějaký objekt
- Pokud je objekt odrazivý, paprsek se pohybuje ve směru odražení
- Pokud je povrch průhledný (refraktivní), je dále sledován ve směru refrakce
- Těmto paprskům říkáme **sekundární paprsky**
- Sekundární paprsky dále sledujeme stejným způsobem, jako primární
- Nejjednodušší přístup – rekurzivní funkce



# Metody vycházející od pozorovatele

## Rekurzivní sledování paprsku

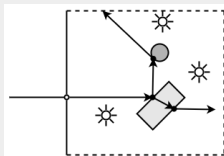
- Primární paprsek začíná u pozorovatele a jde skrz nějaký pixel
- Jak jde scénou, protne objekt, který má reflektivní a refraktivní složku
- Lokální příspěvek je spočítán dle lokálního osvětlovacího modelu (Viz přednáška Světlo a stíny)
- Vyhodnotí se reflektivní a refraktivní příspěvek – ty jsou určeny tím, co je vidět v odraženém a lomeném směru
- Abychom je získaly, spočítáme odražené a lomené paprsky (kterým směrem půjdou) a metodu rekurzivně voláme s nimi
- Rekurzivní proces končí, když paprsek opustí scénu (vrátíme barvu pozadí) nebo pokud narazí na objekt, který paprsky dále neodráží/neláme (vrátíme lokální osvětlení)
- Je možné, že se paprsek odráží od objektů mnohokrát, rekurzi zastavíme při určité hloubce rekurze (a vrátíme černou barvu)

# Metody vycházející od pozorovatele

## Průchod paprsku scénou

### Příklad

Okomentujte následující obrázek.

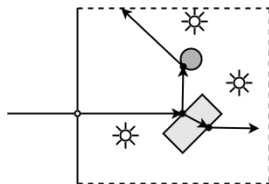


- **Primární paprsek** ( $R_0$ ) – je veden pixelem obrazovky  $P$  do scény
- V ní nalezne nejbližší **průsečík s tělesem  $A$**
- Z tohoto tělesa vrhneme 3 **stínové paprsky** (ke každému světelnému zdroji  $L_1, L_2, L_3$ ), abychom vyhodnotili osvětlení
- Také odtud vedeme dva **sekundární paprsky**  $R_1$  ve směru lomu a  $R_3$  ve směru odrazu
- Ve směru lomeného paprsku  $R_1$  paprsek projde poloprůhledným tělesem  $A$  a v místě opuštění ( $A'$ ) opět vyhodnotíme osvětlení

# Metody vycházející od pozorovatele

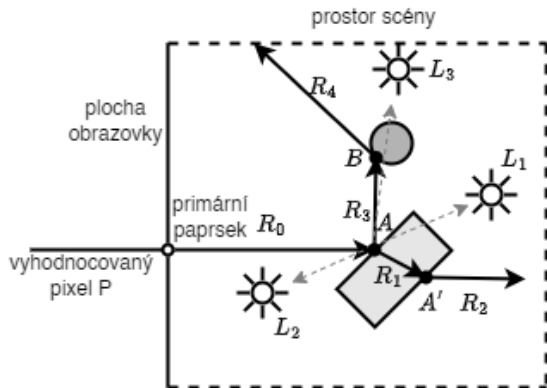
## Průchod paprsku scénou

- Sledování podruhé lomeného paprsku  $R_2$  ukončíme, když opustí scénu
- Na dráze odraženého paprsku  $R_3$  nalezneme neprůhledné těleso  $B$ , na něm také vyhodnotíme osvětlení
- Od tohoto tělesa sledujeme odražený paprsek  $R_4$  na jehož dráze další objekty nejsou



# Metody vycházející od pozorovatele

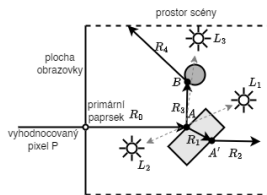
## Průchod paprsku scénou



# Metody vycházející od pozorovatele

## Průchod paprsku scénou

- Po vyhodnocení stínových paprsků na tělese  $A$  bude bod ležet částečně ve stínu – osvětlen je pouze zdrojem  $L_2$  a částečně  $L_1$
- Osvětlení od zdroje  $L_1$  je sporné, protože zdroj neosvětluje bod přímo, světlo se při průchodu objektem láme
- Většina metod tento problém není schopna řešit a proto jej zanedbává





# Metody vycházející od pozorovatele

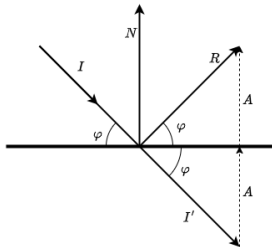
## Odraz a lom paprsku

- V místě, kde paprsek protne těleso určujeme, jakým směrem bude dále paprsek pokračovat (při odrazu od tělesa a při průchodu tělesem)
- V obou případech do výpočtu zasáhne směr paprsku a také normála v tomto bodě
- U refrakce navíc relativní hustota obou materiálů na hranici objektu

# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = reflexe

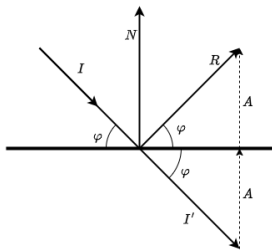
- Dochází k němu u hodně lesklých ploch
- Úhel paprsku spolu s normálou je stejný jako úhel odraženého paprsku a normály
- $I$  ... přicházející paprsek,  $N$  ... normála,  $R$  odražený paprsek
- Vektor  $I'$  je směr, kterým by paprsek pokračoval, kdyby nenarazil na objekt ( $I$  a  $I'$  jsou stejné vektory, jen jinde nakreslené)
- Úhel dopadajícího paprsku k tečně objektu v tomto bodě je shodný, jako úhel odraženého paprsku k této tečně  
 $R = I * 2A$
- $A$  je rovnoběžné s  $N$  → délka dopadajícího a odraženého paprsku je shodná
- Pokud jsou  $I$  a  $I'$  jednotkové, pak je  $A$  rovno sinu úhlu mezi  $I$  a tečnou ( $\varphi$ )



# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = reflexe

- Úhel mezi  $I$  a  $N$  je roven  $90 + \varphi$   
 $\cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi$
- Skalární součin  $I$  a  $N$  nám dá zápornou délku  $A$
- Pokud jsou  $I$  a  $N$  jednotkové, pak  
 $R = I - 2(I \cdot N)N$



## Příklad

Spočítejte směr odrazu paprsku  $I = (30, 10)$  od přímky dané dvěma body  $A = [0, 0]$  a  $B = [5, 10]$ .

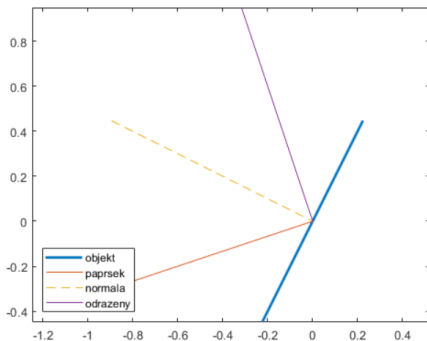
# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = reflexe

## Příklad

Spočítejte směr odrazu paprsku  $I = (30, 10)$  od přímky dané dvěma body  $A = [0, 0]$  a  $B = [5, 10]$ .

$$R = (-0.3162, 0.9487)$$



# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

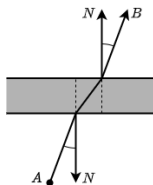
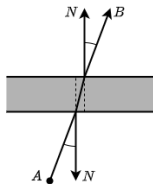
- Při průchodu paprsku z jednoho průhledného média do druhého, může se směr paprsku změnit díky rozdílu hustot těchto médií
- Fermat: cesta paprsku z  $A$  do  $B$  bude co nejkratší (v čase) i když se délka cesty zvětší
- Pokud paprsek cestuje skrz médium, které je konzistentní ve svém objemu, pak se bude pohybovat po přímce
- Např. ve vakuu



# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

- Pokud jde paprsek skrz dvě média, aby se dostal z  $A$  do  $B$  musí se ohnout tak, aby byla doba cesty nejkratší
- Pokud cestuje do hustšího média, ohne se blíže k normále, protože světlo se pohybuje pomaleji v hustším materiálu
  
- Pokud přejde do méně hustého (řidšího) materiálu, světlo může cestovat rychleji (tedy delší cestou) – ohne se od normály



# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

- V závislosti na tvaru objektu se může tvar objektu za průhledným objektem deformovat



- Hustotu určíme **indexem refrakce** – čím je médium hustší, tím je index větší
- Vakuum má index refrakce 1, vzduch také blízký 1, sklo 1.5 a voda 1.33

# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

- Index může být různý pro různé vlnové délky
- U některých materiálů to může být až o 3 procenta v průběhu viditelného spektra
- Sklo: červená se láme méně, než fialová (1.519 - 1.539)





# Metody vycházející od pozorovatele

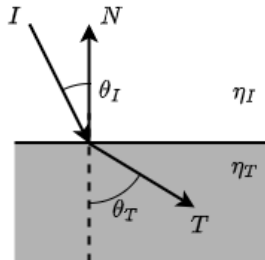
Odraz = refrakce

- $\eta_I \cdot \sin \theta_I = \eta_T \cdot \sin \theta_T$
- $\eta_I$  a  $\eta_T$  indexy refrakce dvou materiálů
- $\theta_I$  a  $\theta_T$  jsou úhly svírající přicházející paprsek ( $I$ ) a lomený paprsek ( $T$ , transmitted) s normálou
- Výpočet sinu je pomalý (cosinus je možné spočítat pomocí skalárního součinu) → převod na cosinus a vyjádřená  $\theta_T$

$$\cos \theta_T = \frac{\sqrt{1 - \eta_I^2 (1 - \cos^2 \theta_I)}}{\eta_T}$$

$$\theta_I = -I \cdot N$$

$$T = \frac{\eta_I}{\eta_T} I \left( \frac{\eta_I}{\eta_T} \cos \theta_T \right) N$$



# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

## Příklad

Paprsek světla  $I = (30, 10)$  přechází z prostředí s indexem lomu 1 do prostředí s indexem lomu 1.5 v bodě s tečnou danou přímkou zadanou body  $A = [0, 0]$  a  $B = [5, 10]$ .

Spočítejte lomený paprsek  $T$ .

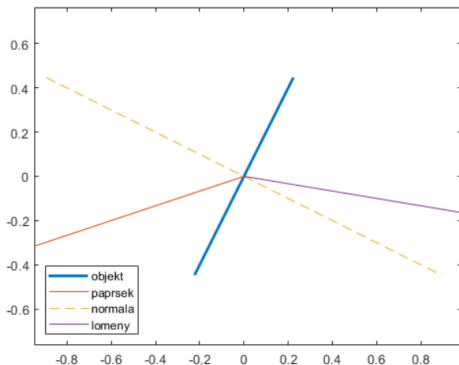
# Metody vycházející od pozorovatele

Odraz = refrakce

## Příklad

Paprsek světla  $I = (30, 10)$  přechází z prostředí s indexem lomu 1 do prostředí s indexem lomu 1.5 v bodě s tečnou danou přímkou zadanou body  $A = [0, 0]$  a  $B = [5, 10]$ .  
Spočítejte lomený paprsek  $T$ .

$$T = (217.73, -36.29)$$



# Metody vycházející od pozorovatele

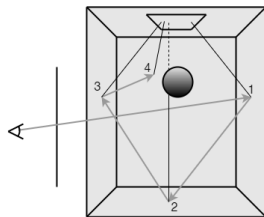
## Sledování cesty

- **Sledování cesty** (path tracing) – další metoda vycházející od pozorovatele
- Kompletní řešení zobrazovací rovnice – za cenu velké výpočetní náročnosti
- Sledujeme dráhu zcela náhodného paprsku od pozorovatele
- Každým pixelem se pošle velké množství paprsků a sledují se jejich trasy
- V každém průsečíku paprsku s objektem ve scéně se vypočítá lokální osvětlovací model (včetně detekce stínu)
- Detekce stínu pomocí **stínového paprsku** – v místě dopadu paprsku se pošle paprsek ke světelnému zdroji (u plošných zdrojů je stínících paprsků více)
- Pomocí BRDF se určí směr dalšího sledování paprsku (náhodným vzorkováním BRDF)

# Metody vycházející od pozorovatele

## Sledování cesty

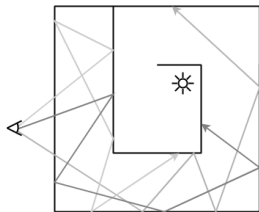
- V průsečíku 2 stínový paprsek protne objekt, tedy průsečík není tímto zdrojem zde osvětlen
- Oproti předchozí metodě se zde neberou přesné odrazy (lomy), ale náhodné odrazy dané BRDF
- Trajektorie je díky náhodě pro každý paprsek jiná
- Paprsky procházející jedním pixelem se pak zprůměrují → odhad osvětlovací funkce
- Paprsků je velké množství, lepší je sledovat takové, které mají méně odrazů (stačí hloubka rekurze 5)
- Jelikož je odraz náhodný, vzniká šum
- Čím více paprsků prochází jedním pixelem, tím dostáváme lepší výsledek (běžně se používá 1000 - 10000 paprsků)



# Metody vycházející od pozorovatele

## Sledování cesty

- Méně je potřeba paprsků ve scénách, ve kterých je změna nepřímého osvětlení pomalá (Např. zatažená obloha)
- Zcela nevhodná je pro scény se složitými světelnými podmínkami
- Paprsky od pozorovatele jsou zastaveny po 5 odrazech. Aby ale bylo nosaženo světla je potřeba odrazů více.
- Další problematický jev – kaustiky
- Metoda je schopna vyřešit kaustiky, ale za cenu výpočetní náročnosti
- Pravděpodobnost, že paprsek zasáhne místo, kde vzniká kaustika je poměrně malá
- Ještě menší pravděpodobnost, že se světlo odrazí od zrcadlového povrchu do zdroje světla, případně do místa skrz které se zalomí přesně do zdroje světla



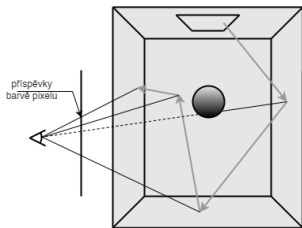
## Metody vycházející od zdroje světla

- Metody začínající u pozorovatele nejsou vhodné pro práci s malými či skrytými zdroji světla a mají problémy s výpočty kaustik
- Metody, kde se vychází od světelného zdroje tyto problémy odstraňují, ale jsou více zatíženy šumem
- Označují se jako **metody vystřelující energii** (shooting method)
- Obecně hledají řešení osvětlování všech drah vycházejících ze světelného zdroje

# Metody vycházející od zdroje světla

## Myšlenka algoritmu

- Vyšleme paprsek od zdroje světla směrem do scény
- Určíme výkon odcházejícího paprsku a poté se rekurzivně sleduje jeho trajektorie ve scéně
- V každém průsečíku s objektem se vypočítá osvětlení bodu a určí se množství světla jdoucí k pozorovateli
- Tím se určí příspěvek k barvě pixelu, kde se od tohoto bodu vedená polopřímka k pozorovateli protne s obrazovkou
- Tyto hodnoty postupně přičítáme k pixelu a z těchto příspěvků nakonec vypočítáme průměr
- Po vypočítání lokálního osvětlení se vypočítá odražený (nebo prostupující) paprsek a pokračuje se v jeho sledování





# Metody vycházející od zdroje světla

- Problém – velké množství paprsků, které se možná ani nevyužijí, neboť nedorazí k pozorovateli
- Velký šum – nemůžeme ovlivnit, kolik paprsků (vzorků) přispěje k barvě jednotlivých pixelů
- Je potřeba velké množství paprsků
- Různé přístupy:
  - Sledování fotonů
  - Sledování světla

# Metody vycházející od zdroje světla

## Sledování fotonů

- **Sledování fotonů** (photon tracing)
- Duální metoda k metodě sledování paprsku
- Používá stejné druhy odrazů, ale provádí se v opačném směru – tedy jen zrcadlové odrazy a průhledné objekty
- Nesimuluje difúzní odraz a tak je vypočítávána pouze trajektorie  $LS * DE$
- To znamená, že se spočítá lokální osvětlení všech průsečíků po libovolném množství zrcadlových odrazů
- Málo často používaná

# Metody vycházející od zdroje světla

## Sledování světla

- **Sledování světla** (light tracing)
- Metoda duální k metodě sledování cesty
- Paprsek vycházející ze zdroje světla či odražený od objektu a nesoucí určitý výkon dopadne na nějaký bod na povrchu tělesa
- Určíme zda je tento bod viditelný z polohy pozorovatele
- Pokud ano, určí se pixel, který bude zasažen (definován polopřímku jdoucí z tohoto bodu k pozorovateli)
- K barvě pixelu se přičte hodnota barvy paprsku odraženého směrem k pozorovateli vynásobená hodnotou  $1/n$  ( $n$  je počet příspěvků k tomuto pixelu)
- Následně náhodně vzorkujeme BRDF v bodě odrazu a určíme útlum výkonu v nově vypočítaném směru
- Je-li příspěvek malý, sledování se ukončí, pokud má pro další výpočet paprsek nějaký význam, sleduje se dál
- Pokud je těleso průhledné, spočítá se nová dráha paprsku a útlum a sleduje se paprsek dál

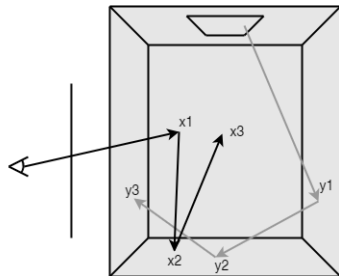
# Dvousměrné metody

- **Dvousměrné metody** (bidirectional methods)
- Odstraňují nevýhody dříve zmíněných metod a spojují jejich výhody
- Najednou sledují cestu od zdroje i od pozorovatele
- Ta od zdroje je výhodná pro výpočet kaustik a zaručuje rychlejší konvergenci k řešení u složitých scén
- Ta od pozorovatele snižuje šum a umožňuje přesnější výsledky díky požadovaným počtům paprsků jdoucích jedním pixelem

# Dvousměrné metody

## Dvousměrné sledování cesty

- **Dvousměrné sledování cesty** (bidirectional path tracing)
- V dostatečně krátkém čase generuje kvalitní výsledky prakticky všech optických jevů
- Dráha od pozorovatele je označena průsečíky  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$
- Dráha od zdroje průsečíky  $y_1$ ,  $y_2$  a  $y_3$
- Poté, co jsou obě dráhy určeny, spojí se poslední průsečíky obou cest  $x_3$  a  $y_3$  – vznikne cesta  $y_1y_2y_3x_3x_2x_1$
- Určí se viditelnost a vzájemné příspěvky mezi všemi kombinacemi  $x_i$  a  $y_i$



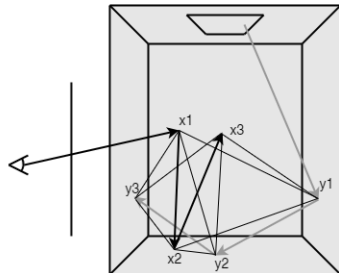
### Příklad

Zakreslete do obrázku.

# Dvousměrné metody

## Dvousměrné sledování cesty

- V obrázku nejsou zakresleny stínové paprsky jdoucí od zdroje světla a průsečíky dráhy jdoucí od pozorovatele
- Vzájemné energetické příspěvky se musí převést na odpovídající veličiny (od pozorovatele vyšetřujeme radiance, od zdroje výkon)
- Poté je k dispozici radiance pro pixel, kterým prochází paprsek jdoucí od pozorovatele a zároveň všechny pixely, které jsou viditelné ze všech průsečíků paprsků jdoucích od světelného zdroje
- Obtížný výpočet kaustik (mohou být zašuměné)



# Fotonové mapy

- Globální zobrazovací technika
- Pracuje ve dvou krocích
- **1. krok – vystřelovací** (shooting)
- Ze všech světelných zdrojů vystřelíme velké množství fotonů, každý nese část energie světelného zdroje
- Fotony se ve scéně odráží
- Fotony ukládáme do trojrozměrné datové struktury – **fotonové mapy** – pro pozdější výpočet
- Do fotonové mapy ukládáme cestu fotonu ze zdroje až k jeho pozici
- **2. krok – zobrazení** výsledného obrázku na základě dat uložených ve fotonové mapě
- Při každém průsečíku s objektem se naleznou nejbližší fotony a z jejich hodnot se vypočítá příspěvek osvětlení od všech světelných zdrojů
- Fotonové mapy se mohou zobrazit přímo – barevné chyby – falešný difúzní přenos barvy

# Sledování paprsku

- **Ray tracing** – sledování paprsku
- **Ray casting** – vrhání paprsku
- Paprsky se šíří od pozorovatele skrz pomyslný pixel v rovině průmětny (obrazovky)
- Můžeme ho chápat jako sondu, která hledá odpověď na otázku, jaké informace tento paprsek přináší?
- Paprsek sledujeme zpětně
- **Dvě varianty**
  - Vržení paprsku – sledování paprsku 1. řádku
  - Sledování paprsku vyššího řádu



# Sledování paprsku

## Vržení paprsku 1. řádu

- **Vržení paprsku 1. řádu** – ray casting
- Zobrazuje pouze bod na povrchu nejbližšího tělesa zasaženého paprskem
- V tomto bodě určíme barvu pomocí jednoduchého osvětlovacího modelu (např. Phong)
- Vzhled obrázků vzniklých tímto přístupem se neliší od obrázků získaných dříve popsanými metodami
- Dají se ale jimi na rozdíl od dřívějších metod zobrazovat i objekty v jiných reprezentacích (CSG, objemová data)

# Sledování paprsku

## Sledování paprsku vyššího řádu

### ■ Sledování paprsku vyššího řádu

- Sledování nekončí po nalezení nejbližšího průsečíku, ale pokračuje sledováním dalších paprsků odvozených podle odrazivosti a průhlednosti nalezeného tělesa
- Opět vidíme povrch nejbližšího tělesa, ale na jeho barvě se podílejí i světelné příspěvky zjištěné sekundárními paprsky
- Dokáže na povrchu tělesa zobrazit zrcadlové odrazy jiných těles, je schopná zpracovat vržené stíny
- Zpětným sledováním paprsku nelze z principu nalézt všechny paprsky přispívající k osvětlení určitého bodu
- Pokud by bylo ve scéně zrcadlo odrážející světlo na nějaký předmět, museli bychom vést zvláštní stínový paprsek i k zrcadlu (sekundární zdroj světla)
- Pomocí primárních stínových paprsků nalezneme vržené stíny

# Sledování paprsku

## Rozšíření Phongova osvětlovacího modelu

- Osvětlovací model používaný pro výpočet barvy paprsku, který dopadl do určitého bodu na povrchu tělesa je v RT upraven

$$I_V = I_s + I_d + I_a + I_r + I_t$$

$I_s$  ... složka zrcadlového osvětlení

$I_d$  ... složka difúzního osvětlení

$I_a$  ... složka okolního (ambientního) osvětlení

$I_r$  ... odražená složka

$I_t$  ... lomená složka

- $I_s$ ,  $I_d$ ,  $I_a$  jsou vyhodnocovány jen ze světelných zdrojů
- Světelný zdroj je započítán jen pokud z něj na tento bod dopadne světlo (vyhodnocení pomocí stínového paprsku)
- $I_R$  barva paprsku přicházejícího ze směru odrazu je ovlivněna koeficientem zrcadlového odrazu  $r_s$   
$$I_r = r_s \cdot I_R$$
- Podobně i pro lomený paprsek. Zde můžeme zahrnout navíc koeficient útlumu (většinou je závislý na délce trasy paprsku)

# Sledování paprsku

## Nedostatky RT

- Velké výpočetní nároky
- vržené stíny jsou ostré
- Osvětlovací model předpokládá pouze bodové zdroje světla
- Zrcadla ve scéně sice odráží obraz okolních objektů, nejsou však využita pro odraz světla, tedy pro určení nepřímého osvětlení
- Při změně polohy pozorovatele nebo při přidání nového objektu se musí provádět celý výpočet znovu
- Velké nelesknoucí se plochy je vhodnější zobrazit jinou metodou. **Proč?**

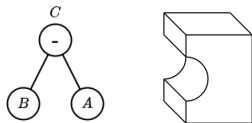
# Sledování paprsku

## CSG reprezentace

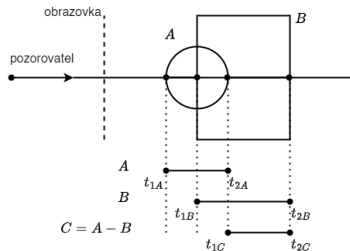
- Pomocí metody sledování paprsku můžeme zobrazovat objekty v různých reprezentacích, například CSG stromem
- Jak víme, základem je najít průsečík paprsku (polopřímky) s objektem
- Je-li objekt reprezentován pomocí CSG stromu, je tento úkol složitější
- Paprsek vedený pixelem v případě CSG stromu nepoužíváme k nalezení průsečíku s nejbližším tělesem, ale se všemi primitivními tělesy
- Tyto průsečíky pak dále zpracováváme (krok vyhodnocení)
- Průnik paprsku s konvexním primitivem leží v intervalu parametru  $t$  polopřímky
- Interval vymezuje úseky paprsku, ty jsou dále podstoupeny množinovým operacím v CSG stromu
- Výsledný úsek určuje viditelnou část CSG stromu

# Sledování paprsku

## CSG reprezentace



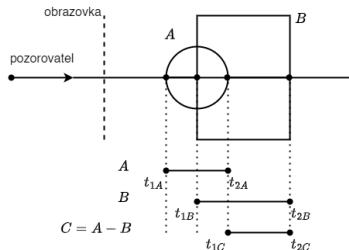
- Od kvádru B odečítáme válec A – výsledkem je těleso C
- Na obrázku je jeden z paprsků, který protíná obě tělesa
- Výsledkem jsou dva intervaly  $\langle t_{1A}, t_{2A} \rangle$  a  $\langle t_{1B}, t_{2B} \rangle$



# Sledování paprsku

## CSG reprezentace

- Tyto intervaly dále zpracováváme odspodu nahoru
- Po provedení rozdílu v kořeni stromu dostaneme interval  $\langle t_{2A}, t_{2B} \rangle$
- Blíže k pozorovateli je průsečík s parametrem  $t_{2A}$ , vyhodnotíme pro něj osvětlovací model a barvu přiřadíme pixelu, jím paprsek prochází
- Pozor! tento pod patří tělesu B



# Sledování paprsku

## CSG reprezentace

- Je vhodné rozdělit prostor obsahující CSG strom pomocí oktalového stromu (Viz přednáška Scéna) a v jednotlivých podprostorech CSG strom zjednodušit (prořezat) (Viz přednáška Reprezentace trojrozměrných dat)
- Jiný způsob zrychlení – procházíme strom od kořene zleva doprava s ohledem na množinové operace ve vnitřních uzlech
- Vyhodnocujeme-li rozdíl a v levém podstromu nic paprsek neprotnul, není potřeba vyhodnocovat pravý podstrom a podobně u ostatních operací



# Sledování paprsku

## Objemová reprezentace

- Uvedené algoritmy pracují se skalárními objemovými daty
- **Dělení**
  - Algoritmy zobrazující povrchy
  - Přímé objemové algoritmy
- **Algoritmy zobrazující povrchy** (surface fitting algorithms)
  - Vytváří nejprve geometrickou reprezentaci povrchu → pracují s objemovými daty nepřímo
  - Výhoda – dochází ke zmenšení objemu dat → rychlejší vykreslení
  - Už jsme se tomu věnovali dříve
  - **Jakým způsobem jsme to dělali?**
- **Objemové algoritmy** (direct volume rendering)
  - Zobrazují data přímo, bez nutnosti převodu do povrchové reprezentace
  - Využívají celou prostorovou informaci

# Sledování paprsku

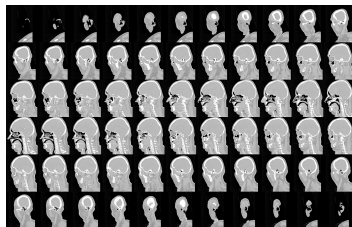
## Objemové algoritmy

- Založené na metodě vrhání paprsku
- Dělení:
  - **Metody pracující s daty bez hledání povrchu** – bez segmentace
  - **Metody hledající povrch**, které však nepočítají normály
  - **Metody hledající povrch a normály** – normálu jen odhadují

# Sledování paprsku

## Objemové algoritmy

- Data: z CT (pravidelná mřížka  $224 \times 256 \times 300$ )
- Algoritmy jsou popsány tak, že paprsky vrháme směrem kolmo na data (osu  $x$ )
- Počítáme intenzitu pro každý pixel (je nutno vypočítanou hodnotu převést do rozsahu hodnot obrazovky)
- $I_i$  ... hodnota  $i$ -tého vzorku podél paprsku
- $J$  ... množina započítaných vzorků (vzorků zasažených paprskem a vyhovujících dalším podmínkám a jsou zahrnuty do dalšího výpočtu)



# Objemové algoritmy

## Metody nehledající povrch

- Nevyžadují žádné předzpracování dat
- Jsou rychlé – hodí se v náhledech

### Maximum intensity projection (MIP)

- Zobrazuje pouze nejjasnější struktury podél paprsku

$$I = \max_{i \in J} I_i$$



# Objemové algoritmy

## Metody nehledající povrch

### Summed intensity projection

- Zobrazuje součet intenzit podél paprsku

$$I = \sum_{i \in J} I_i$$

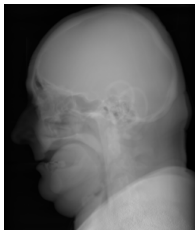
- Na obrázku je roztažen kontrast

### Average intensity projection

- Zobrazuje průměr intenzit podél paprsku

$$I = \frac{\sum_{i \in J} I_i}{|J|}$$

- V tomto případě jsou výsledky podobné, protože podél paprsku je vždy stejný počet vzorků, obecně to tak ale není



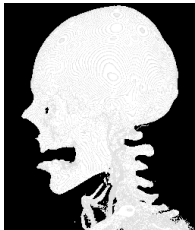
# Objemové algoritmy

## Jednoduché zobrazení povrchu

- Máme navíc informaci o tom, které vzorky patří do objemu, který chceme zobrazovat a které ne
- Je to binární informace  $b$
- $I_S$  ... intenzity na povrchu

### Voxel value projection

- Vezmeme intenzitu prvního vzorku na povrchu na cestě paprsku  
 $I = I_S$
- Zobrazuje pouze barvu – obdoba konstantního stínování
- Zrnění na povrchu je způsobeno tím, že vzorky v objemu nemusí být přesně povrchové body, mohou tedy mít jinou intenzitu



# Objemové algoritmy

## Jednoduché zobrazení povrchu

### Z-buffer shading (distance-only shading)

- Nastavujeme jas podle hodnoty vzdálenosti nejbližšího vzorku na dráze paprsku  
 $I = Z(P)$   
 $P$  souřadnice pixelu, kterým prochází paprsek
- Zobrazuje pouze barvu – obdoba konstantního stínování



# Objemové algoritmy

## Zobrazení povrchu s normálou

- Objemový vzhled získáme, když do zobrazení zahrneme normálu povrchu v bodě, kde paprsek objem protíná
- Můžeme jí pouze odhadovat
- Když máme normálu, můžeme spočítat osvětlení pomocí Phongova osvětlovacího modelu

$$I = I_d + I_s + I_a$$

$$I_a = I_A r_A$$

$$I_d = I_L \cdot r_d (\vec{l} \cdot \vec{n})$$

$$I_s = I_L \cdot r_s (\vec{v} \cdot \vec{r})^h$$

- Metod odhadu normály je více, zmíníme 3 z nich



# Objemové algoritmy

## Zobrazení povrchu s normálou

### Z-buffer gradient shading

- Aproximuje normálu k povrchovému vzorku vektorem, jehož kolmým průmětem do plochy obrazovky je vektor gradientu v dvourozměrné mapě vzdáleností k povrchu
- Paprsek procházející pixelem o souřadnicích  $[p_x, p_y]$ :  
$$n_x = Z(p_x + 1, p_y) - Z(p_x - 1, p_y)$$
$$n_y = Z(p_x, p_y + 1) - Z(p_x, p_y - 1)$$
$$n_x = 1$$
- zachycuje tvar, ale na zaoblených površích vytváří artefakty – vrstevnice

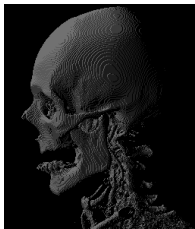


# Objemové algoritmy

## Zobrazení povrchu s normálou

### Voxel gradient shading

- Orientaci povrchu odhaduje podle gradientu v binárním objemu  $\rightarrow$  složky nabývají jen hodnot 1, 0 a  $-1$
- Tedy pouze 27 různých vektorů
- Povrchový vzorek o souřadnicích  $[s_x, s_y, s_z]$ :  
$$n_x = b(s_x + 1, s_y, s_z) - b(s_x - 1, s_y, s_z)$$
$$n_y = b(s_x, s_y + 1, s_z) - b(s_x, s_y - 1, s_z)$$
$$n_z = b(s_x, s_y, s_z + 1) - b(s_x, s_y, s_z - 1)$$



# Objemové algoritmy

## Zobrazení povrchu s normálou

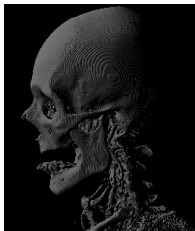
### Grey-level gradient shading

- Předpokládá, že na povrchu dochází k největší změně hodnot vzorků a proto opět počítá normálu k povrchu ve směru gradientu (směr největší změny) hodnot intenzity v původním trojrozměrném objemu
- Díky velkému rozsahu intenzit jsou povrchy hladké
- Gradient se odhaduje dle rozdílu hodnot v mřížce

$$n_x = f(s_x + 1, s_y, s_z) - f(s_x - 1, s_y, s_z)$$

$$n_y = f(s_x, s_y + 1, s_z) - f(s_x, s_y - 1, s_z)$$

$$n_z = f(s_x, s_y, s_z + 1) - f(s_x, s_y, s_z - 1)$$



# Sledování paprsku

## Urychlení

- Výpočty jsou náročné → věnováno hodně úsilí urychlovacím metodám
- Různé třídy zrychlení:
  - **Urychlení výpočtu průsečíků**
    - Rychlejší výpočet průsečíků
    - Méně výpočtů průsečíků (dělení scény, hierarchie obálek, ...)
  - **Snížení počtu paprsků** – adaptivní vyhlazování, adaptivní řízení hloubky rekurze
  - **Sledování více paprsků najednou** – svazky paprsků
- Tyto metody se často kombinují

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku

- Základní problém – nalezení, kde paprsek protíná objekt
- Často se kombinují s testy hit/miss, které vyloučí objekt z dalšího výpočtu dříve, než dojde ke skutečnému výpočtu průsečíku
- **Paprsek** – parametrická rovnice přímky
$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$$
$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$$
- Počátek paprsku (bod  $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ ) je pozice kamery/pozorovatele
- Druhá bod, ležící na tomto paprsku, je pixel na obrazovce ( $P_2 = [x_2, y_2, z_2]$ )
- Parametr  $t$  není omezen shora – přímka jde do nekonečna
- Pro záporná  $t$  platí, že body jimi určené leží za pozorovatelem a tudíž nejsou brány v úvahu

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s rovinou

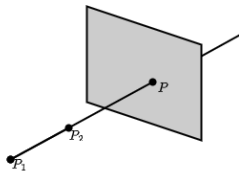
- **Obecná rovnice roviny:**  $Ax + By + Cz + D = 0$
- **Kde protíná paprsek tuto rovinu?**
- $[x, y, z]$ , které splňují rovnici, leží v rovině
- Hledáme  $t$ , které splňuje rovnici (dosadíme jednu rovnici do druhé)

$$A(x_1 + (x_2 - x_1)t) + B(y_1 + (y_2 - y_1)t) + C(z_1 + (z_2 - z_1)t) + D = 0$$

- Vyjádříme  $t$

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}$$

- $t$  dosadíme do parametrické rovnice paprsku a získáme průsečík



### Příklad

Spočítejte průsečík přímky dané body  $P_1 = [0, 0, 0]$  a  $P_2 = [2, 2, 1]$  s rovinou  $x + y + z - 10 = 0$ .

# Sledování paprsku

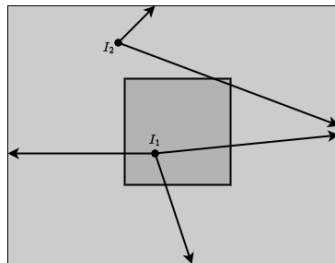
## Průnik paprsku s rovinou

- Pokud je jmenovatel roven 0, neexistuje průsečík – rovina a paprsek jsou rovnoběžné
- $(A, B, C)$  je normála roviny
- Jmenovatel je skalární součin normály roviny a směru paprsku
- Skalární součin je roven 0 pokud jsou vektory kolmé  $\rightarrow$  paprsek je rovnoběžný s rovinou
  
- V tomto výpočtu předpokládáme, že rovina je nekonečná
- Ve scéně jsou objekty tvořeny konečnými ploškami
- Pro výpočet průsečíku s ploškou spočítáme nejprve průsečík s rovinou, ve které ploška leží a pak rozhodneme, zda průsečík leží uvnitř plošky

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s ploškou

- Promítneme průsečík a plošku do  $x$ ,  $y$  nebo  $z$  roviny (dle největší z hodnot  $A$ ,  $B$  a  $C$ )
- Největší vybíráme proto, že chceme, aby promítnutá ploška byla svojí velikostí co nejbližší nepromítnuté
- Jakmile jsou promítnuty, číslo, které udává, kolikrát libovolná polopřímka vedená z průsečíku protne hranici plošky, rozhodne, zda je uvnitř nebo ne
- Liché číslo značí, že je uvnitř, sudé, že je vně

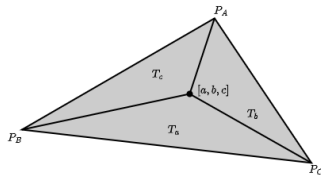




# Sledování paprsku

Průnik paprsku s trojúhelníkovou ploškou

- **Trojúhelníkovou plošku** můžeme vyjádřit v barycentrických souřadnicích
- $P_A, P_B, P_C$  jsou vrcholy vymežující plošku
- Každý bod plošky:  
$$p(a, b, c) = a \cdot P_A + b \cdot P_B + c \cdot P_C$$
 $a, b, c$  jsou v rozsahu  $\langle 0, 1 \rangle$  a jejich součet je roven 1
- **Kde leží bod, pokud je  $b = 0$ ?**
- **Kde leží bod, pokud je  $a = 0$  a  $b = 0$ ?**



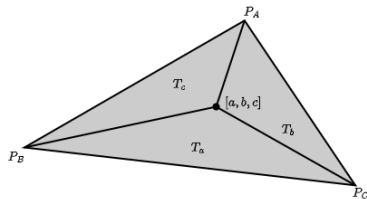
## Příklad

Předpokládejme, že máme trojúhelníkovou plošku  $P_A = [50, 100, 35]$ ,  $P_B = [20, 60, 30]$ ,  $P_C = [70, 80, 40]$ . Jaké jsou souřadnice bodu, pokud  $a = 0.5$ ,  $b = 0.3$ ,  $c = 0.2$ ?

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s trojúhelníkovou ploškou

- $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou koeficienty, které představují poměr ploch subtrojúhelníků  $T_a$ ,  $T_b$  a  $T_c$
- $a$ ,  $b$ ,  $c$  spočítáme jako průsečík paprsku a roviny
- Pokud některá z hodnot nebude v rozsahu  $\langle 0, 1 \rangle$ , nebo součet není roven 1, pak leží průsečík v rovině mimo tuto plošku



- $a = 1 - b - c$

$$P(a, b, c) = P_A + b \cdot (P_B - P_A) + c \cdot (P_C - P_A)$$

- Paprsek protne rovinu obsahující trojúhelníkovou plošku

$$x_1 + (x_2 - x_1)t = P_{Ax} + b \cdot (P_{Bx} - P_{Ax}) + c \cdot (P_{Cx} - P_{Ax})$$

$$y_1 + (y_2 - y_1)t = P_{Ay} + b \cdot (P_{By} - P_{Ay}) + c \cdot (P_{Cy} - P_{Ay})$$

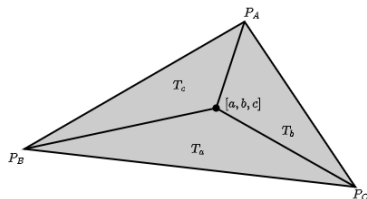
$$z_1 + (z_2 - z_1)t = P_{Az} + b \cdot (P_{Bz} - P_{Az}) + c \cdot (P_{Cz} - P_{Az})$$

- 3 rovnice, neznámé  $t$ ,  $b$  a  $c$

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s trojúhelníkovou ploškou

- Jakmile spočítáme neznámé, zkontrolujeme, zda je průsečík v trojúhelníku



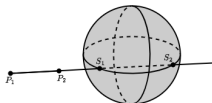
### Příklad

Předpokládejme, že máme trojúhelníkovou plošku  $P_A = [50, 100, 35]$ ,  $P_B = [20, 60, 30]$ ,  $P_C = [70, 80, 40]$ . Paprsek je dán body  $P_1 = [0, 0, 0]$  a  $P_2 = [25.5, 39, 18]$ . Protíná tento paprsek trojúhelníkovou plošku? Pokud ano, v jakém bodě?

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s koulí

- **Koule** – střed  $C = [x_C, y_C, z_C]$ , poloměr  $r$   
 $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$   
Body na povrchu koule splňují tuto rovnici
- Průsečíky nalezneme tak, že dosadíme rovnici přímky do této rovnice
- Pokud se přímka dotýká koule, průsečík bude jeden, pokud jí protíná, budou dva



$$\begin{aligned} &(x_1 - (x_2 - x_1)t)^2 + 2 \cdot x_C \cdot (x_1 - (x_2 - x_1)t) + x_C^2 + \\ &(y_1 - (y_2 - y_1)t)^2 + 2 \cdot y_C \cdot (y_1 - (y_2 - y_1)t) + y_C^2 + \\ &(z_1 - (z_2 - z_1)t)^2 + 2 \cdot z_C \cdot (z_1 - (z_2 - z_1)t) + z_C^2 = r^2 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} &((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)t^2 + \\ &(2(x_2 - x_1)(x_1 - x_C) + 2(y_2 - y_1)(y_1 - y_C) + 2(z_2 - z_1)(z_1 - z_C))t + \\ &x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2(x_C x_1 + y_C y_1 + z_C z_1) + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - r^2 = 0 \end{aligned}$$

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

A  
B  
C

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s koulí

### Příklad

Pro kouli se středem  $C = [50, 60, 20]$  a poloměrem  $r = 50$  najděte průsečík s paprskem zadaným body  $P_1 = [0, 0, 0]$  a  $P_2 = [25.5, 39, 18]$ .

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s koulí

### Příklad

Pro kouli se středem  $C = [50, 60, 20]$  a poloměrem  $r = 50$  najděte průsečík s paprskem zadaným body  $P_1 = [0, 0, 0]$  a  $P_2 = [25.5, 39, 18]$ .

$$A = 2.4953e+03$$

$$B = -7950$$

$$C = 4000$$

$$t1 = 2.5598$$

$$t2 = 0.6262$$

$$S1 = 1 \times 3$$

$$65.2754 \quad 99.8330 \quad 46.0768$$

$$S2 = 1 \times 3$$

$$15.9690 \quad 24.4231 \quad 11.2722$$

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s koulí

- Proces výpočtu je poměrně náročný, ale existují vylepšení
- $P_2 - P_1$  představují směr paprsku, pokud ho znormujeme, pak bude  $A$  vždy rovno 1
- Tato normalizace nám ušetří výpočet několika mocnin a násobení ( $A$  odstraníme z rovnice)
- Výpočet  $C$  můžeme také zrychlit, začátek rovnice je nezávislý na poloze a velikosti koule (je stejný i pro jiné koule ve scéně)
- Díky odstranění  $A$  nikdy nedojde k dělení 0
- Pokud je člen pod odmocninou záporný (diskriminant), pak paprsek neprotíná kouli
- Paprsek nejprve protne tu část koule, kterou získáme menším kladným  $t$
- V předchozím příkladě  $t_2$

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s kvádrem

- Hledání průniku se 6 stěnami, což je 6x testování průniku s ploškou
- Existuje rychlejší způsob
- Pokud je osově orientovaný – stačí zjistit, zda paprsek protíná rozsah  $x$ ,  $y$  a  $z$  hodnot
- $t$  udává, jaká část paprsku je uvnitř
- Levý bližší spodní roh  $[x_s, y_s, z_s]$ , pravý vzdálenější horní roh  $[x_e, y_e, z_e]$
- $x \in \langle x_s, x_e \rangle$ ,  $y \in \langle y_s, y_e \rangle$ ,  $z \in \langle z_s, z_e \rangle$
- Rozsah  $t$  hodnot pro průnik s  $x$  souřadnicemi:  
$$x_s = x_1 + (x_2 - x_1)t_{x_s}$$
$$x_e = x_1 + (x_2 - x_1)t_{x_e}$$

...
- Poté vezmeme průnik těchto intervalů

### Příklad

Pro obdélník s levým spodním rohem  $[10, 5]$  a pravým horním rohem  $[20, 10]$  spočítejte průniky s paprskem daným body  $[0, 2]$  a  $[2, 3]$ .



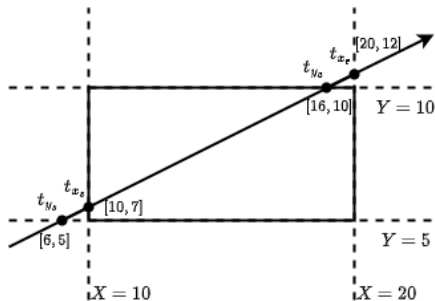
# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s kvádrem

### Příklad

Pro obdélník s levým spodním rohem  $[10, 5]$  a pravým horním rohem  $[20, 10]$  spočítejte průniky s paprskem daným body  $[0, 2]$  a  $[2, 3]$ .

- $t_x = \langle t_{x_s}, t_{x_e} \rangle = \langle 5, 10 \rangle$   
 $t_y = \langle t_{y_s}, t_{y_e} \rangle = \langle 3, 8 \rangle$
- Průnik  $\langle \max(t_{y_s}, t_{y_e}), \min(t_{x_e}, t_{x_e}) \rangle$
- Pokud by šel paprsek v jiném směru, než zleva doprava, zesponu nahoru, intervaly a průnik by byly jiné
- Pokud je  $(x_2 - x_1) > 0 \rightarrow \langle t_{x_s}, t_{x_e} \rangle$   
Pokud je  $(x_2 - x_1) < 0 \rightarrow \langle t_{x_e}, t_{x_s} \rangle$



# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s kvádrem

### Příklad

Pro kvádr s levým spodním předním rohem  $[15, 10, 5]$  a pravým vzdálenějším horním rohem  $[30, 50, 20]$  spočítejte průniky s paprskem daným body  $[0, 0, 0]$  a  $[30, 50, 20]$ .

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s kvádrem

### Příklad

Pro kvádr s levým spodním předním rohem  $[15, 10, 5]$  a pravým vzdálenějším horním rohem  $[30, 50, 20]$  spočítejte průniky s paprskem daným body  $[0, 0, 0]$  a  $[30, 50, 20]$ .

$$t \in \langle 0.25, 0.4 \rangle$$

# Sledování paprsku

## Průnik paprsku s jinými objekty

- Pokud jsou objekty zadány matematicky, je postup zřejmý – dosadíme parametrické vyjádření přímky do rovnice a dopočítáme  $t$

# Sledování paprsku

Paměť překážek

# Sledování paprsku

Koherence paprsků

# Sledování paprsku

Řízení hloubky rekurze