Promítání

KMI/3DG

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

3D grafika – Grafický postup

- **Modelování**: vytvoření reprezentace objektů a scény
- **Renderování**: převod scény na obraz (z 3D do 2D)
- **Zobrazení**: vykreslení obrazu na obrazovku, případně vytištění

3D grafika – Renderování

- Renderování – převod trojrozměrné informace do dvourozměrné
- Řešíme následující úlohy:
  - Globální osvětlení – závisí na zdrojích světla a vlastnostech materiálů, ze kterých jsou tělesa a prostředí
  - Pohled na scénu – odkud je scéna pozorovaná – nastavení kamery, řešení promítací úlohy a viditelnosti
  - Vytvoření rastrového obrazu – lokální osvětlovací modely a textury
- **Pohledový (zobrazovací) řetězec**:
  Geometrie objektu → Orientace podle kamery → Ořezání pohledovým objemem → Promítání → Transformace do okna obrazovky → Lokální osvětlení → Rasterizace → Mapování textury → Určení viditelnosti pixelu → Rastrový obraz

3D grafika – Renderování

- Vstupní model (např. série trojúhelníků) je podroben pohledové transformaci
- Z dalšího výpočtu jsou vyloučeny části ležící mimo pohledový objem
- Následující transformace převede data do souřadného systému obrazovky
- Lokální osvětlení řeší barevná stínování na jednotlivých ploškách, které jsou následně rasterizovány
- Poté je nanesena textura
- Skládá-li se scéna z více objektů, objekty vykreslujeme postupně – více později
- Jednotlivé části zobrazovacího řetězce mohou být optimalizovány – před zobrazením z objektu vybereme jen ty části, které víme, že se v promítání projeví a ostatní nezpracováváme

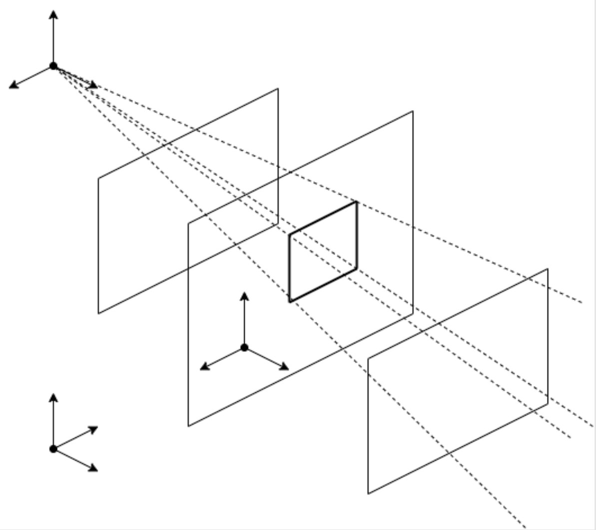
3D grafika – Promítání

- **Promítání** – Transformace, která charakterizuje převod trojrozměrného objektu do 2D item Při promítání dochází ke ztrátě prostorové informace, pozorovatel kvůli tomu může mít zkreslenou představu o tvaru objektu
- Při promítání používáme postupy a pravidla, která zlepšují reálný vjem (viditelnost těles, ortogonální průměty, axonometrie)
- Studiem promítacích metod se zabývá **deskriptivní geometrie** – díky použití postupů z ní můžeme zpětně odvodit z 2D obrázku různé prostorové vztahy (vzdálenosti, úhly, ...)

3D grafika – Promítání

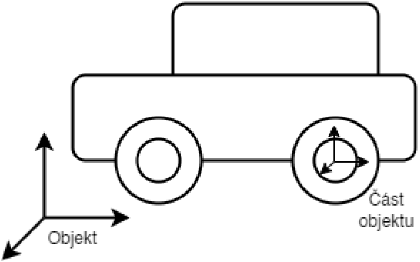
Example

Zaznačte následující (modré) pojmy do obrázku.



3D grafika – Promítání

- **Souřadný systém světa** (world coordinate system) – objekty reálného světa popsané uživatelem jsou v těchto souřadnicích
- Každý objekt může mít vlastní a může jich mít i více
- Např. objekt se skládá z několika geometrických primitiv, ty jsou definované tak, že je jejich střed v počátku, tato primitiva jsou relativně pozicovány k sobě ve scéně



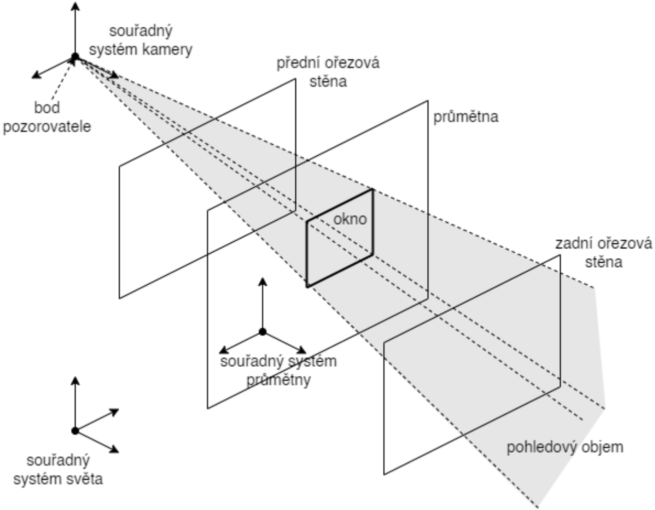
3D grafika – Promítání

- Svět je promítán na **průmětnu** (pohledovou rovinu, view plane) z určitého **bodu pohledu** (view point) – pozice pozorovatele (kamery)
- V místě dopadu paprsků na průmětnu vytváří průmět
- S nimi máme asociovány souřadné systémy – **souřadný systém kamery** (camera coordinate system) a **souřadný systém průmětny** (view plane coordinate system)
- Z bodu pohledu se díváme v kladném směru osy z souřadného systému kamery (**směr pohledu**)
- Část pohledové roviny, které říkáme **okno** (window) vymezuje oblast, která nás zajímá
- Také vymezuje část prostoru, která je dána paprsky vycházejícími s bodu pohledu a procházející oknem do nekonečna – **pyramida pohledu (pohledový objem)** (view pyramid, view volume)

3D grafika – Promítání

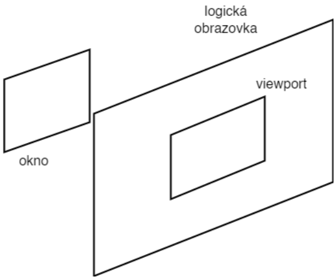
- Pro omezení objektů v tomto nekonečném prostoru se navíc používají dvě ořezové roviny (ořezové stěny), které odstraňují objekty, které jsou příliš blízko – **přední stěna** (near) – a objekty, které jsou pro pozorovatele nezajímavé – **zadní stěna** (far)
- Někdy se přední ořezová stěna ztotožňuje s průmětnou
- Vznikne **Ořezaný (omezený) pohled** (záběr) – zobrazujeme jen objekty v tomto omezeném prostoru

3D grafika – Promítání



3D grafika – Systémy souřadnic

- **Systémy souřadnic**
  - světové
  - kamery
  - průmětny
- Obecně mohou být různé, ale většinou jsou systémy kamery a průmětny rovnoběžné (z souřadnice kamery je kolmá na průmětnu a x a y jsou rovnoběžné s oknem)
- Při zobrazování je potřeba namapovat souřadnice v souřadném systému průmětny na souřadnice souřadného systému fyzického zařízení
- Okno je mapováno na **viewport** (výřez logické obrazovky)



3D grafika – Systémy souřadnic

- **Z okna na viewport**
- Oba jsou obdélníky, které mají strany rovnoběžné s x a y souřadnicemi
- Hledáme mapování z jednoho obdélníku na druhý (intuitivně – změna měřítka)
- **Okno** – $W = [w_a, w_b] \times [w_c, w_d]$
- **Viewport** – $V = [v_a, v_b] \times [v_c, v_d]$
- **Transformace** – $T(x, y) = (T_1(x), T_2(y))$

Example

Odvoďte transformaci z okna na viewport.

3D grafika – Systémy souřadnic

Example

Odvoďte transformaci z okna na viewport.

- Pro intervaly $[a, b]$ a $[c, d]$ hledáme $S : [a, b] \to [c, d]$
- $S(a) = c,\ S(b) = d$
- $S(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a} = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c)$

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{w_b - w_a}((v_b - v_a)x + (w_b v_a - w_a v_b)), \frac{1}{w_d - w_c}((v_d - v_c)y + (w_d v_c - w_c v_d))\right)$$

3D grafika – Systémy souřadnic

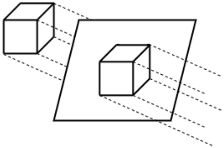
Example

Najděte rovnici pro následující transformace:

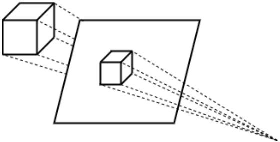
- $T : [-1, 2] \times [3, 5] \to [5, 7] \times [-3, 4]$
- $T : [7, -2] \times [1, 2] \to [3, 2] \times [0, 3]$

Rovinná promítání:

- Rovnoběžné – charakterizováno směrem promítání (všechny paprsky mají stejný směr)



- Středové – charakterizováno středem promítání (promítací paprsky vycházejí z jediného bodu)



Rovinná promítání

Úloha promítání:

1. Volba souřadných systémů – světového a průmětny
2. Formulace promítací úlohy – výběr geometrických parametrů pomocí nichž lze odvodit pozici kamery (pozorovatele), průmětny, středu nebo směru promítání
3. Stanovení transformace, která popíše promítání prostorových bodů do průmětny
4. Nalezení transformace mezi souřadnými systémy průmětny a světa v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = T_{proj} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [x_p, y_p, z_p, w_p]$ jsou souřadnice v systému průmětny bodu $[x, y, z, 1]$

T_{proj} je matice 4×4

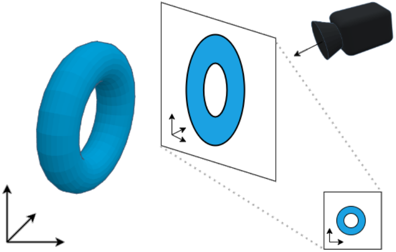
Rovinná promítání

- Základem formulace geometrické situace je:
  - Určení místa, kde stojí pozorovatel (kamera)
  - Určení pozice a orientace průmětny
  - Stanovení směru pozorování

Rovinná promítání – kamera

Kamera

- Pořizuje snímek na průmětnu, která je kolmá na hlavní optickou osu kamery
- Záběr kamery nebudeme brát v úvahu
- Kamera zabírá celý poloprostor před kamerou a objekt promítá středovým nebo rovnoběžným promítáním
- Světové souřadnice kamery – $[kamera_x, kamera_y, kamera_z, 1]$
- Ve scéně zvolíme bod $[cil_x, cil_y, cil_z, 1]$, na který zamíříme kameru – tím je určen směr pozorování $\overrightarrow{L} = (L_x, L_y, L_z, 0)$, který je rovnoběžný s hlavní optickou osou kamery



Example

Zaznačte do obrázku zmíněné pojmy.

Rovinná promítání – kamera

- Směr pozorování

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} cil_x \\ cil_y \\ cil_z \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kamera_x \\ kamera_y \\ kamera_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Po normalizaci $\overrightarrow{L}$ dostaneme jednotkový vektor $\overrightarrow{I}$
- Jak se normalizuje vektor?
- Požadujeme, aby pohledová transformace T_{kamera} mezi světovým souřadným systémem a systémem průmětny převedla tento vektor na $(0, 0, -1, 0)$, tj. na vektor, který je kolmý na průmětnu (rovnoběžný s osou z_p) a mířící ve směru záporné poloosy z_p

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{kamera} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rovinná promítání – kamera

- Orientaci kamery (natočení okolo optické osy) určuje vektor $\overrightarrow{u}$ (up vektor, hook)
- Předpokládáme o něm, že je kolmý na $\overrightarrow{I}$ (rovnoběžný s průmětnou) a jednotkový
- Pomocí vektorového součinu určíme 3. vektor $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{I}$, který ukazuje ve směru osy x_p souřadného systému průmětny
- Až na posunutí je souřadný systém průmětny vztažený ke kameře – je dán trojicí vektorů $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{I}$
- Obdobně, jako v případě zvoleného směru pohledu požadujeme, aby pohledová transformace mezi světovým souřadným systémem a systémem průmětny převedla vektor $\overrightarrow{p}$ na $(1,0,0,0)$ a $\overrightarrow{y}$ na $(0,1,0,0)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = T_{kamera}\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = T_{kamera}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\\0\end{pmatrix}$$

Example

Jak vypadá matice T_{kamera}?

Rovinná promítání – kamera

- Po sestavení všech podmínek dostaneme na levé straně jednotkovou matici a hledaná matice musí být inverzní k matici sestavené z vektorů $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{kamera} \begin{bmatrix} p_x & u_x & -I_x & 0 \\ p_y & u_y & -I_y & 0 \\ p_z & u_z & -I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Všechny vektory jsou jednotkové a vzájemně kolmé, matice je ortonormální – hledanou matici získáme jednoduše transpozicí

$$T_{kamera} = \begin{bmatrix} p_x & u_x & -I_x & 0 \\ p_y & u_y & -I_y & 0 \\ p_z & u_z & -I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & 0 \\ u_x & u_y & u_z & 0 \\ -I_x & -I_y & -I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pak už jen provedeme posunutí tak, aby byl zvolený bod ve scéně totožný s počátkem souřadného systému průmětny

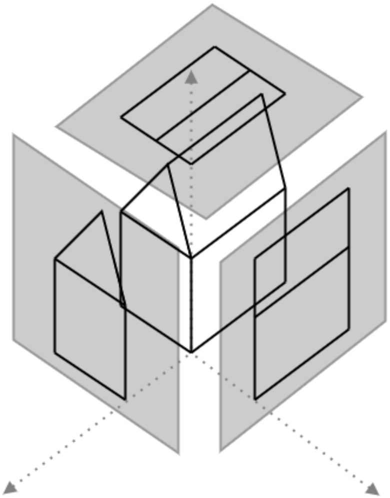
Rovnoběžné promítání

- Nejjednodušší – promítání do některé z rovin $x = x_0$, $y = y_0$ nebo $z = z_0$ ve směru příslušné osy (nejčastěji je $x_0 = 0$ – rovina yz, $y_0 = 0$ – rovina xz nebo $z_0 = 0$ – rovina xy)
- Maticově:

$$T_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

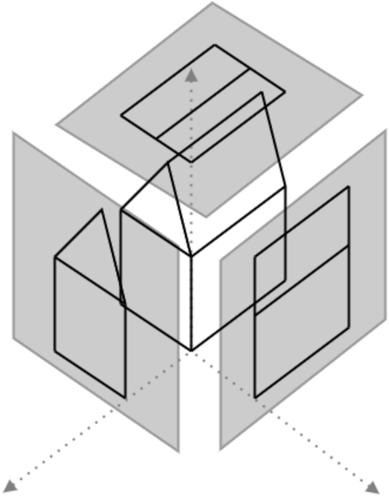
$$T_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Promítací paprsky jsou kolmé na průmětnu a mají směr shodný s normálovým vektorem průmětny



Rovnoběžné promítání

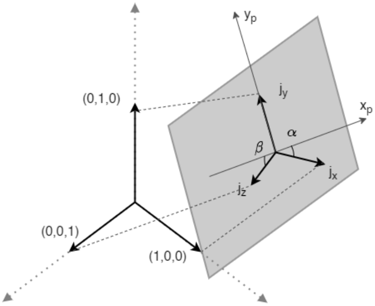
- Pojmy: **nárys**, **bokorys**, **půdorys**, **spodní pohled**, **pohled zezadu**
- **Mongeovo promítání** – speciální případ kolmého promítání (půdorys a nárys v jednom)



Rovnoběžné promítání – Axonometrie

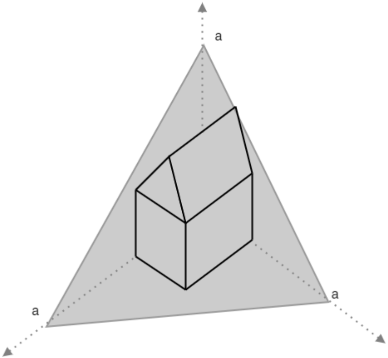
- Pokud průmětna není rovnoběžná s hlavními osami – **Axonometrie**
- Definována 5 hodnotami:
  - j_x, j_x, j_z ... průměty jednotek na osách x, y a z
  - α, β ... úhly, které svírají promítnuté osy j_x a j_z s kolmicí na průmět osy j_y
  - Jestliže souřadný systém průmětny (osy x_p a y_p) zvolíme tak, aby průmět j_y ležel na ose y_p pak axonometrii popíšeme

$$T_{axon} = \begin{bmatrix} j_x \cdot \cos\alpha & 0 & -j_z \cdot \cos\beta & 0 \\ -j_x \cdot \sin\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j_z \cdot \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rovnoběžné promítání – Izometrie

- Pokud průmětna protne hlavní osy ve stejné vzdálenosti od počátku (svírá stejný úhel se všemi osami) – **Izometrie**
- V průmětu lze měřit a porovnávat vzdálenosti, zkreslení vzdáleností je totiž se všech směrech promítnutých os stejné



Example

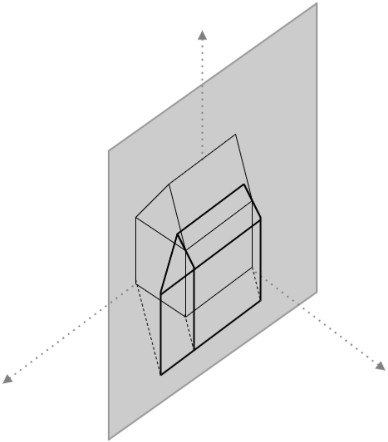
Na čem je závislé zkreslení vzdáleností? Jaké je?

Rovnoběžné promítání – Izometrie

- Mají-li shodnou vzdálenost od počátku pouze dva průsečíky – **Dimetrie**
- V průmětu lze měřit a porovnávat vzdálenosti pouze ve dvou směrech promítnutých os (ve třetím jsou zkrácené)
- Při obecném sklonu průmětny vůči osám – **Trimetrie**
- V každém směru je jiné měřítko zkreslení
- **Vztahy**:
  - Izometrie: $j_x = j_y = j_z$, $\alpha = \beta$
  - Dimetrie: $j_x = j_y$, $\alpha = \beta$
  - Trimetrie: $j_x \neq j_y \neq j_z$

Rovnoběžné – Kosoúhlé promítání

- Technické kosoúhlé promítání: $j_y = j_z = 1,\ \beta = 0$ Kombinujeme vlastnosti Mingeova promítání (znázornění některého z průmětů) s axonometrickým
- Průmětna je rovnoběžná s některou z hlavních rovin, směr rovnoběžného promítání NENÍ kolmý na průmětnu
- Používá se v technickém kreslení
- Se zvětšující se vzdáleností od pozorovatele nezkracuje vzdálenosti v rovinách rovnoběžných s průmětnou a poskytuje částečný boční pohled na promítaný objekt

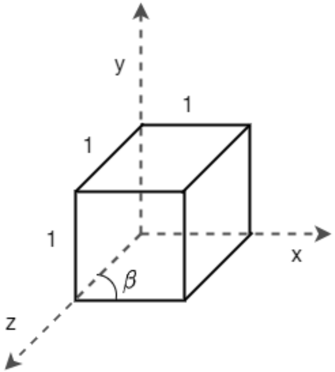


Rovnoběžné – Kosoúhlé promítání

Kavalír

- Směr promítání svírá s průmětnou úhel $45°$
- Úsečky rovnoběžné s průmětnou i kolmé na průmětnu se promítají se stejnou délkou
- Transformace:

$$T_{kavalir} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

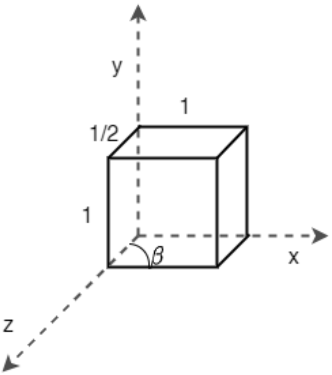


Rovnoběžné – Kosoúhlé promítání

Kabinet

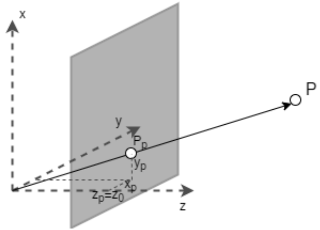
- Směr promítání svírá s průmětnou úhel $atan(2) = 63.4°$
- Úsečky kolmé na průmětnu se zkracují na polovinu
- Je realističtější neboť poskytuje představu o zkracování vzdáleností při pohledu směrem do scény
- Transformace:

$$T_{kabinet} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos\beta}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sin\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Středové promítání

- Středové promítání – **Perspektivní**
- Odpovídá tomu, jak prostor vnímá člověk reálný svět
- Modeluje proporcionální zmenšování předmětů při vzrůstající vzdálenosti od pozorovatele
- Předpokládejme, že pozorovatel je v počátku souřadného systému a průmětna je kolmá na osu z
- Vzdálené objekty v průmětně jsou při zobrazené zmenšeny, objekty v průmětně se promítnou ve své velikosti a objekty před průmětnou se na obraze zvětší



Středové promítání

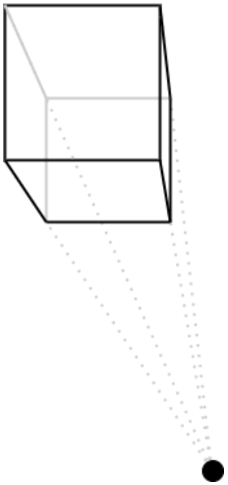
-
- Transformace:

$$T_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Středové promítání nezachovává rovnoběžnost úseček
- Výjimkou jsou prostorové úsečky, které leží v rovině s průmětnou
- Průmětna může mít libovolnou polohu, z praktického hlediska se rozlišují 3 případy odpovídající orientaci průmětny vůči osám souřadného systému:
  - Jednobodová perspektiva
  - Dvoubodová perspektiva
  - Trojbodová perspektiva

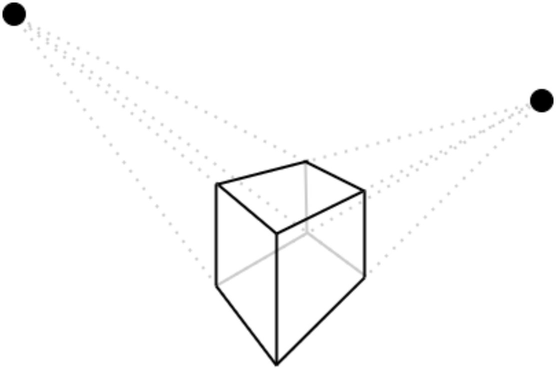
Středové promítání – Jednobodová perspektiva

- Průmětna protíná jedinou souřadnicovou osu
- Všechny úsečky kolmé na průmětnu míří do jednoho bodu, který se nazývá **hlavní úběžník**
- Úběžník můžeme chápat jako nekonečno, kde se protínají rovnoběžky



Středové promítání – Dvoubodová perspektiva

- Průmětna protíná dvě ze souřadných os
- Hrany osově orientovaných kvádrů směřují do dvou hlavních úběžníků

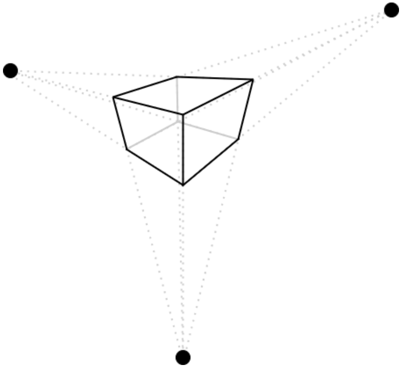


Středové promítání – Trojbodová perspektiva

- Nejobecnější – průmětna protíná všechny tři osy
- Transformace:

$$T_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} & \frac{1}{z_0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Úběžníky, kde průmětna protíná jednotlivé osy: $[-x_0, 0, 0, 1]$, $[0, -y_0, 0, 1]$, $[0, 0, -z_0, 1]$



Pohledový objem

- Odstranění objektů, které jsou příliš blízko, nebo daleko – nachází se mimo oblast zájmu
- Urychlení procesu vykreslování
- Při středovém promítání jsou objekty před průmětnou větší – může způsobit problémy
- Střed promítání navíc nesmí ležet v průmětně (dělení 0)
- Také nechceme promítat objekty, které jsou za zády pozorovatele
- **Pohledový objem** (záběr) – u středového promítání je objem komolý jehlan, u rovnoběžného kvádr
- Jak se jmenují roviny, které vymezují pohledový objem?
- Úhly při vrcholu kamery jehlanu by měly odpovídat šíři záběru kamery (vhodné 40-60°)