

Frekvenční doména

Počítačová grafika

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



Palacký University, Olomouc



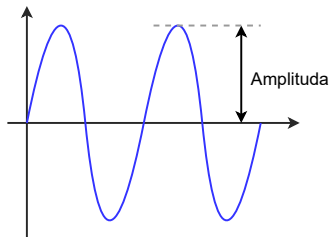
■ Prostorová doména:

- obrazová funkce $f(x, y)$
- jak se daná funkce mění v čase

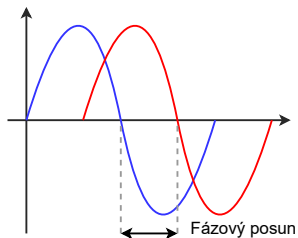
■ Frekvenční doména:

- obraz popsán sinusovými signály
- kolik signálu leží v každém frekvenčním pásmu v rozsahu frekvencí

- **Amplituda** – určuje velikost jednotlivých složek
- **Fáze** – popisuje vztah mezi časem a okamžitou výchylkou
- **Frekvence** – udává počet opakování periodického děje za daný časový úsek



Amplituda



Fázový posun



- **Šum** – vysoké frekvence
- **Alias** – nežádoucí nízkofrekvenční signál

- Přechod mezi doménami – (zpětná) Fourierova transformace
- **Rychlá Fourierova transformace** – časová složitost $M \cdot N \cdot \log(M \cdot N)$

- spojitá funkce $f(x)$
- **Dopředná Fourierova transformace:**
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx$$
- **Eulerova formule** – $e^{-i2\pi ux}$
$$e^{-i2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux)$$
- $F(u)$ – Fourierův obraz
- **Zpětná Fourierova transformace:**
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{+i2\pi ux} du$$
- $F(u) = R(u) + iI(u)$ – reálná část $R(u)$, imaginární část $I(u)$
- Vyjádření pomocí amplitudy a fáze – $F(u) = |F(u)| \cdot e^{i\varphi(u)}$
- **Amplituda** (modul) – $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$
- **Fázový posun** – $\varphi(u) = \tan^{-1} \left(\frac{I(u)}{R(u)} \right)$
- **Fourierovo spektrum** – $P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$



- spojitá funkce $f(x, y)$

- **Dopředná Fourierova transformace:**

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- **Zpětná Fourierova transformace:**

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{+i2\pi(ux+vy)} du dv$$



- diskrétní funkce $f(x)$
- posloupnost vzorků ($x \in \{0, \dots, N - 1\}$)
- $f(x)$ je periodická s periodou N

- **Dopředná Fourierova transformace:**

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{N}}$$

- $u \in \{0, \dots, N - 1\}$

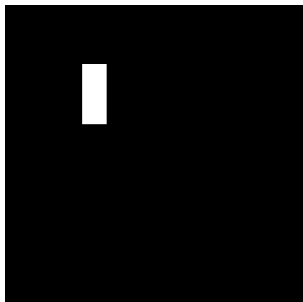
- **Zpětná Fourierova transformace:**

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{+i2\pi \frac{ux}{N}}$$

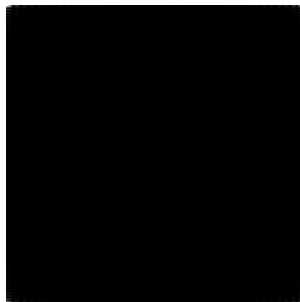


- diskrétní (obrazová) funkce $f(x, y)$
- posloupnost vzorků ($x \in \{0, \dots, M - 1\}$, $y \in \{0, \dots, N - 1\}$)
- $f(x, y)$ je periodická s periodou $M \times N$
- **Dopředná Fourierova transformace:**
$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
- **Frekvenční proměnné:** $u \in \{0, \dots, M - 1\}$, $v \in \{0, \dots, N - 1\}$
- **Frekvenční obdélník:** $M \times N$
- **Fourierovy koeficienty:** $F(u, v)$
- **Fourierovy koeficienty:** $F(u, v)$
- **dc komponenta:** $F(0, 0)$ – je rovna $M \cdot N$ násobku průměrní hodnoty $f(x, y)$
- **Zpětná Fourierova transformace:**
$$f(x, y) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{+i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

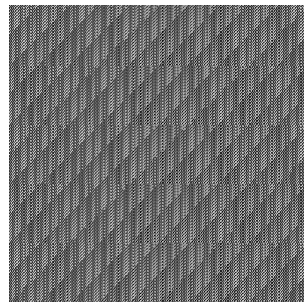
- **Fourierovo spektrum:** $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$
- **Fázový úhel:** $\varphi(u) = \tan^{-1} \left(\frac{I(u)}{R(u)} \right)$



Obraz f

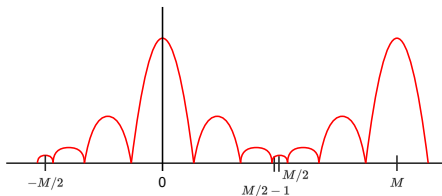


Spektrum

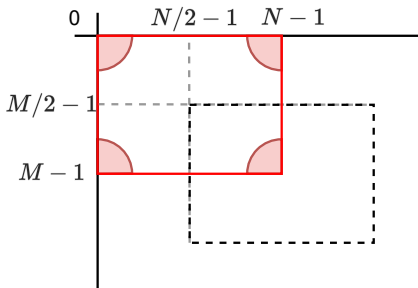


Fáze

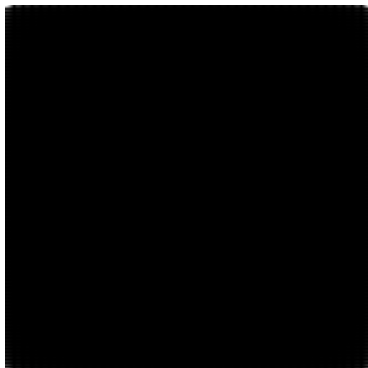
- $F(u)$ ($F(u, v)$) – symetrická podle počátku, periodická s periodou N ($M \times N$)
- Nejvyšší frekvence uprostřed:
 - vynásobení $f(x)$ hodnotou $(-1)^x$ před výpočtem transformace
 - počátek posunut do bodu $M/2$
 - vynásobení $f(x, y)$ hodnotou $(-1)^{x+y}$



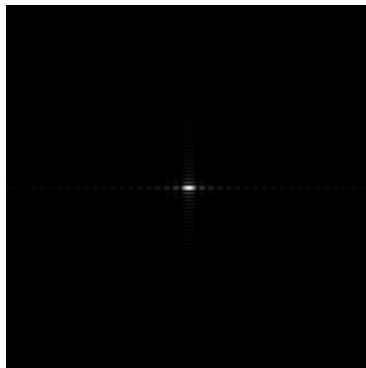
$F(u)$



$F(u, v)$



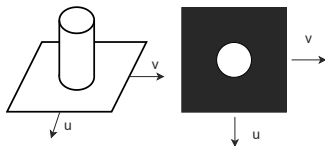
Necentrované



Centrované

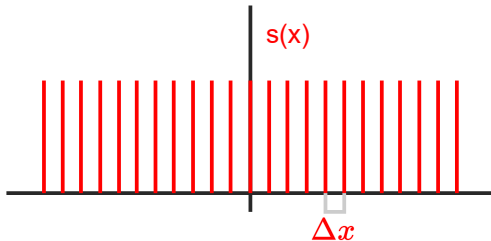
- **Prostorová doména:** $h(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b h(s, t) f(x - s, y - t)$
- **Konvoluční maska:** $h(x, y)$
- $F(u, v)$ Fourierův obraz $f(x, y)$
- $H(u, v)$ funkce $h(x, y)$
- Fourierův obraz $h(x, y) \star f(x, y)$ – součin $H(u, v) \cdot F(u, v)$
- Obraz $H(u, v) \star F(u, v)$ – $h(x, y) \cdot f(x, y)$
- **Konvoluční teorém**
- **filter transfer function:** $H(u, v)$

- úkolem je najít funkci $H(u, v)$
- **Low pass filtry** (LPF) – násobíme vysoké frekvence a potlačujeme nízké
 - **Příklad:** Ideální, Butterwothův, Gaussovský
 - vyhlazovací filtry
 - odstraňování šumu



- **High pass filtry** (HPF) – potlačujeme vysoké frekvence
 - **Příklad:** Ideální, Butterwothův, Gaussovský
 - ostřicí filtry
 - odstraníme i dc komponentu
 - $HPF = 1 - LPF$

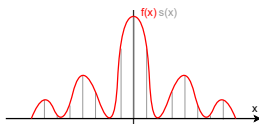
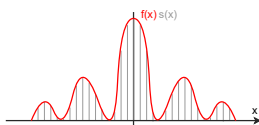
- Vzorkování v prostorové doméně = konvoluce ve frekvenční
- **Vzorkovací funkce:** $s(x)$



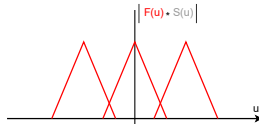
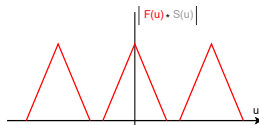
- $s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x)$
- nekonečná funkce Diracových pulzů $\delta(x)$, které jsou v konstantní vzdálenosti Δx

Vzorkování a konvoluce

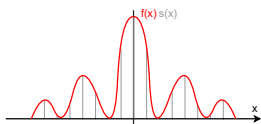
- Vzorkování $f(x)$ vzorkovací funkcí $s(x)$
- $I(x) = f(x) \cdot s(x)$
- Obraz $I(x)$:
- $\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u-i}{\Delta x}\right)$
- Konvoluce $F(u)$ a $S(u)$ – obrazy funkce $f(x)$, které se opakují ve vzdálenosti Fourierových obrazů pulzů vzorkovací funkce $s(x)$



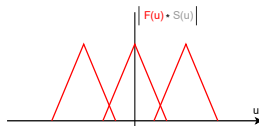
Prostorová doména



Frekvenční doména



Prostorová doména

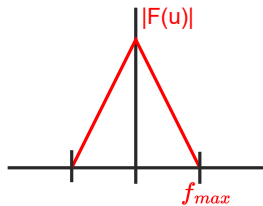


Frekvenční doména

- **Alias** – nechtěná informace

■ Frekvenčně omezená funkce:

- má konečné amplitudové spektrum
- existuje nejvyšší frekvence f_{max} (**Nyquistovo kritérium**)
- $\forall u > f_{max}$ je $|F(u)| = 0$



■ Dostatečně velká frekvence:

- minimálně dvojnásobkem frekvence f_{max}

Shannonův vzorkovací teorém: Signál spojitý v čase je plně určen posloupností vzorků odebíraných ve stejných intervalech $\Delta x \Leftrightarrow f_s = \frac{1}{\Delta x} > 2 \cdot f_{max}$.

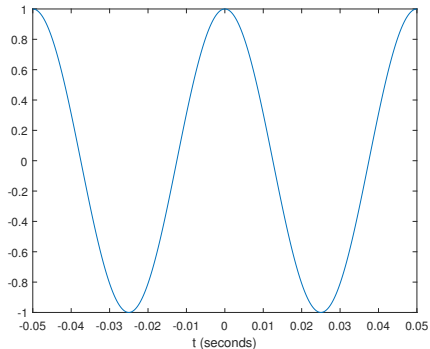


- Každá frekvenčně omezená funkce je reprezentována od určité vzorkovací frekvence přesně a další zvětšování frekvence nevede k přidání detailu a tedy je zbytečná.
- Alias – originální funkce obsahuje detaily, které nemůžeme zobrazit v rastru
 - f není frekvenčně omezená
 - f je frekvenčně omezená, ale vzorkována pod Nyquistovým limitem

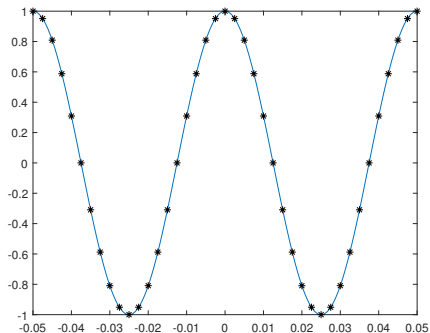
Alias – příklad



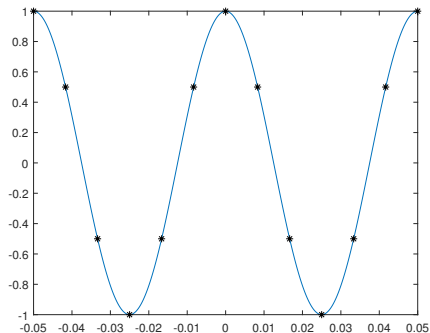
Frekvence je 20 Hz



Vzorkování s větší frekvencí, než je $2 \cdot 20$

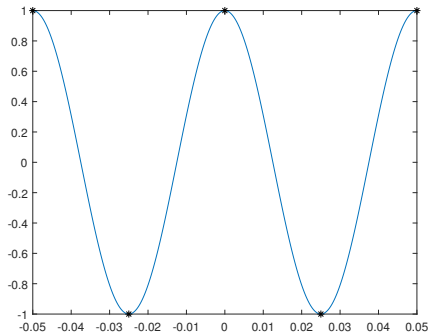


400 Hz

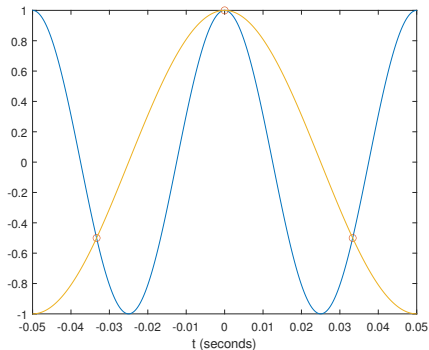
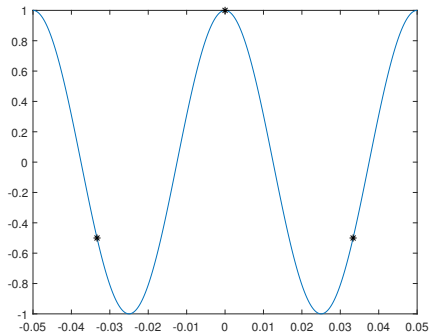


120 Hz

Vzorkování frekvencí rovnou $2 \cdot 20$

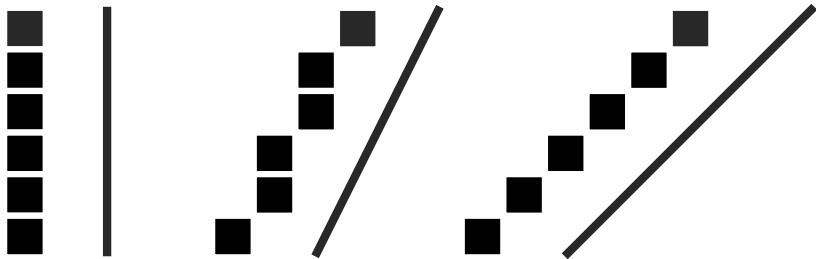


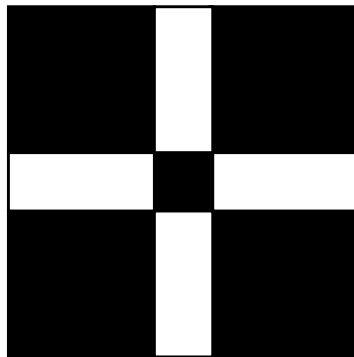
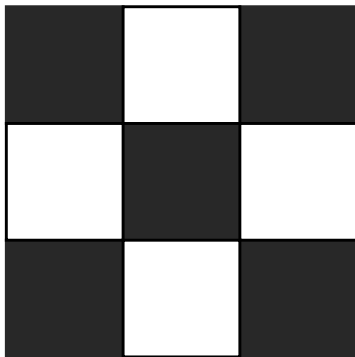
Vzorkování menší než $2 \cdot 20$ (30 Hz)

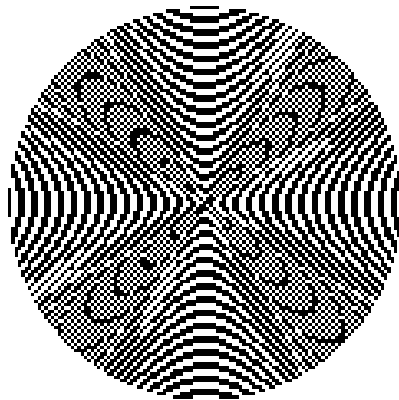
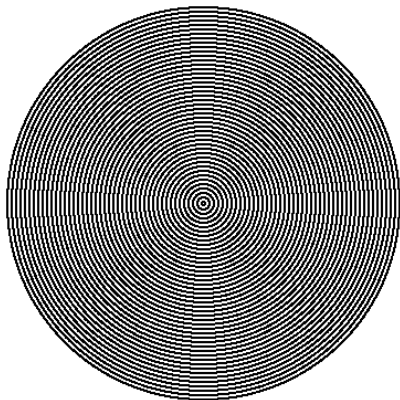


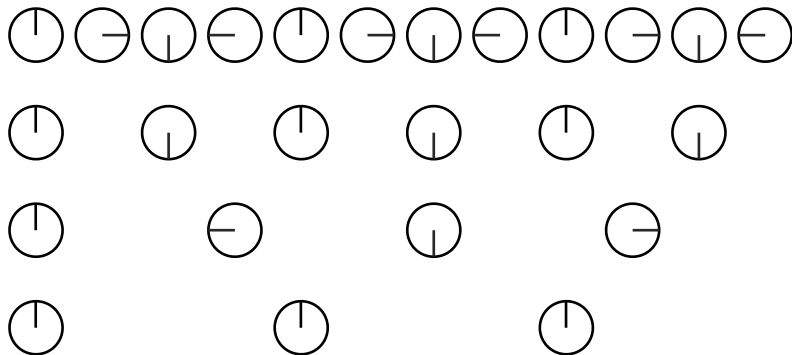
Výsledná funkce 10 Hz

Příklady aliasu – Zubaté zobrazení čar (Jaggies)







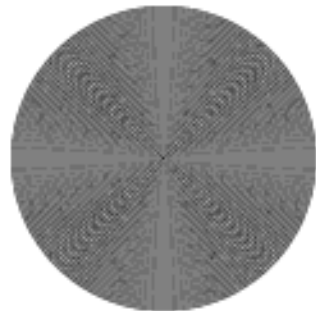
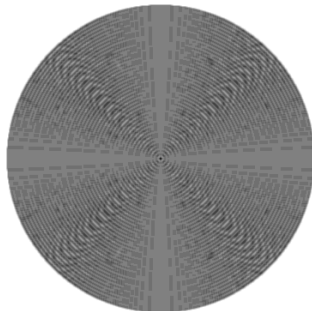
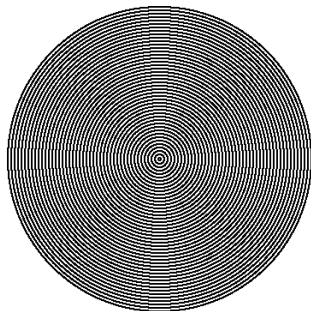




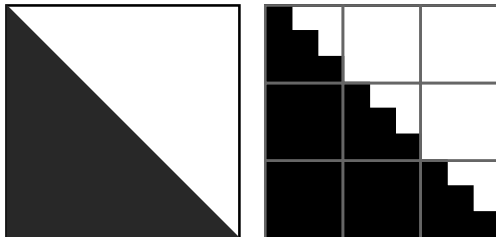
- **Antialiasing:**

- odstranit z obrazu informaci, kterou není možné navzorkovat
- upravit vzorkovací funkci

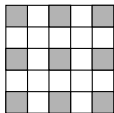
- odstranění vysokých frekvencí ve frekvenční doméně – frekvenčně omezená funkce
- Low pass filtry, vyhlazovací filtry



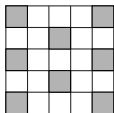
- **supersampling** = zvýšení vzorkovací frekvence – $n_x \times$ ve směru osy x a $n_y \times$ ve směru osy y
- **superpixel** – $n_x \times n_y$ pixelů
- vybereme m vzorků (pokud $m = n_x \cdot n_y$ – oversampling)
- vybrané vzorky: $s_i, i \in \{0, \dots, m-1\}$
- váhy: $w_i, i \in \{0, \dots, m-1\}$
- **downsampling**: superpixely nahrazeny jedním pixelem $\sum_{i=0}^{m-1} w_i \cdot s_i$



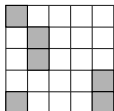
■ Pravidelné vzorkování



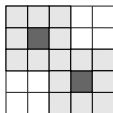
■ Rotovaná mřížka



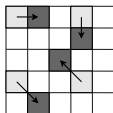
■ Náhodné vzorkování



■ Poissonův disk



■ Jittering – roztřesení



■ Algoritmus n-věží

