

# Křivky

## Křivky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



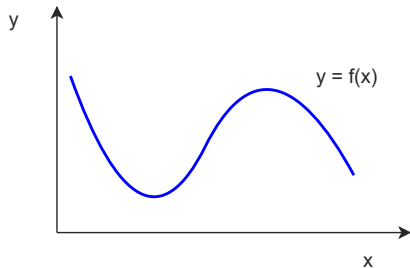
Palacký University, Olomouc



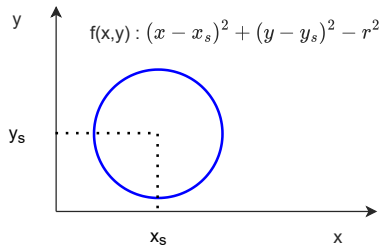
## ■ Zadání:

- Explicitní
- Implicitní
- Parametrické

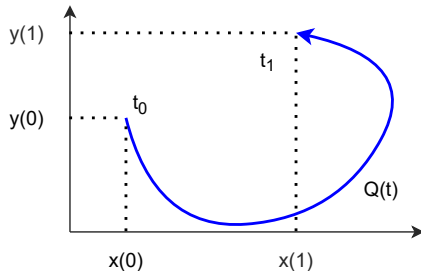
- $y = f(x)$



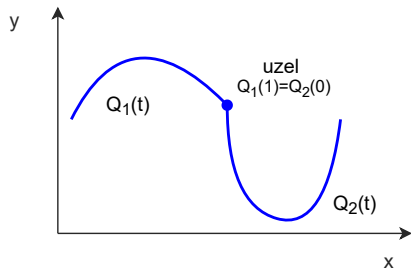
- $f(x, y) = 0$
- **Příklad:** kružnice  
 $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 - r^2 = 0$
- obtížně zobrazitelné



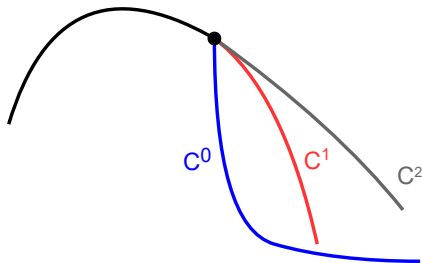
- Dráha bodu v čase  
 $t \in \langle t_{min}, t_{max} \rangle$
- $x = x(t), y = y(t)$
- **Bodová rovnice:**  
 $Q(t) = [x(t), y(t)]$
- **Vektorová rovnice:**  
 $\vec{q}(t) = [x(t), y(t)]$
- **Polohový vektor**  
 $\vec{q}(t) = Q(t) - [0, 0]$
- Jednoduché zobrazení – závisí jen na jednom parametru  $t$



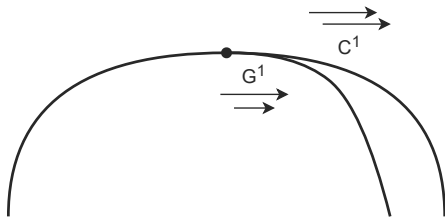
- Složitější křivky dělíme na **segmenty**
- je nutné řešit návaznost – **uzel**
- **Tečný vektor**  $\vec{q}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$
- **Rovnice tečny**  
$$P(u) = Q(t_0) + u\vec{q}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$
- **směrový vektor přímky**  $\vec{q}'(t_0)$
- **Spojitost:**
  - Parametrická
  - Geometrická
- **Třída křivky**



- Parametrické spojitost stupně  $n$
- **Označení:**  $C^n$
- Ve všech bodech má spojitě derivace podle parametru  $t$  do řádu  $n$
- $C^0$  = segmenty jsou spojitě navázány
- $C^1$  = tečný vektor v koncovém bodě segmentu  $Q_1$  je roven tečnému vektoru segmentu  $Q_2$
- $\vec{q}_1^{(i)}(1) = \vec{q}_2^{(i)}(0), \forall i = 0, \dots, n$



- Geometrická spojitost stupně  $n$
- **Označení:**  $G^n$
- Ve všech bodech má spojitě derivace podle parametru  $t$  do řádu  $n$
- $C^0$  = koncový bod prvního segmentu je počátečním bodem druhého
- $C^1$  = tečné vektory  $\vec{q}_1(1)$  a  $\vec{q}_2(0)$  jsou souhlasně kolineární
- $\vec{q}_1(1) = k \cdot \vec{q}_2(0)$ , pro  $k > 0$





# Modelování křivek

- **Polynomiální křivky**

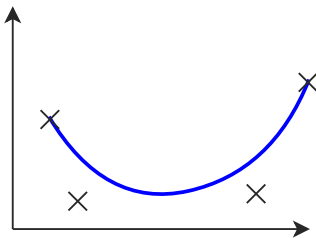
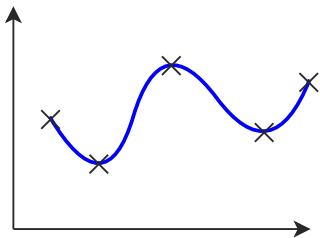
- $Q_n(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$

- Modelují se pomocí **řídících bodů**

- Řídící body tvoří **řídící polynom**

- Řídící body se:

- Interpolují
- Aproximují



- Polynomiální křivky 3. stupně
- Můžeme zaručit spojitost  $C^2$

- **Parametrické zadání:**

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

- **Maticové zadání:**

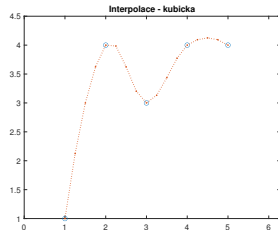
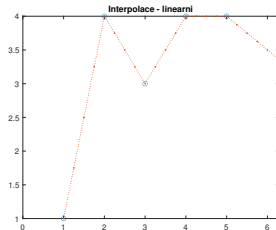
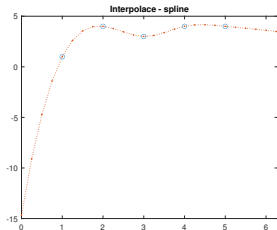
$$Q(t) = TC = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$

- Závisí na 8 parametrech

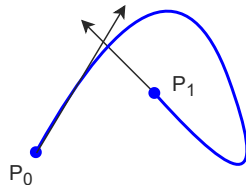
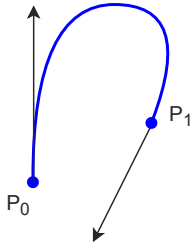
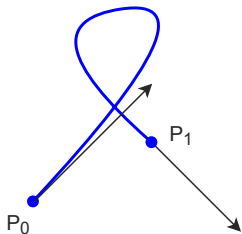


- Křivka má procházet krajními body.
- Pokud na křivku aplikujeme nějakou lineární transformaci (případně projekci), pak bychom měli dostat stejný výsledek, jako bychom tuto transformaci aplikovali na řídicí body a pak křivku podle nich vykreslili.
- Vlastnosti konvexní obálky:
  - silná podmínka: celá křivka leží v konvexní obálce svých řídicích bodů.
  - slabá podmínka: část křivky leží v konvexní obálce některých řídicích bodů (segment leží v obálce svého řídicího polynomu).
- Změnou polohy a váhy řídicího bodu se mění jen část křivky, nikoliv křivka celá.

- **Matlab:** `vystup_y = interp1(vstup_x, vstup_y, vystup_x, metoda);`



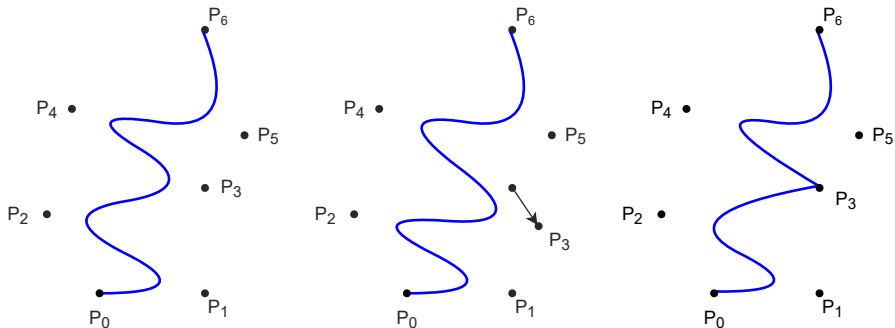
- Interpolační křivky
- **Řídící body:**  $P_0$  a  $P_1$
- **Tečné vektory koncových bodů:**  $\vec{p}_0'$  a  $\vec{p}_1'$
- $P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (t^3 - 2t^2 + t)\vec{p}_0' + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - t^2)\vec{p}_1'$





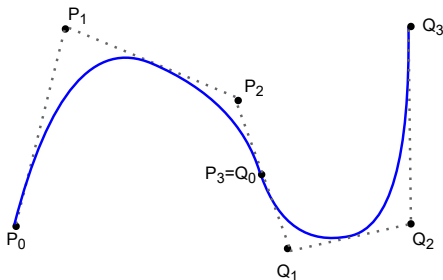
- Křivka nemusí procházet body, jen se k nim blížit
- **Příklad:**
  - Beziérovky křivky
  - Coonsovy křivky
  - Spline křivky

- **Použití** – definice fontů
- Křivka prochází prvním a posledním bodem a leží v konvexní obálce řídicích bodů
- Invariantní vůči posunu, změně měřítka a otočení
- Změna polohy bodu má vliv na tvar celé křivky
- **Beziérová křivka stupně  $n$** :  $Q(t) = \sum_{i=1}^n P_i B_i^n(t)$
- $B_i$  jsou *Bernsteinovy polynomy  $n$ -tého stupně*
- $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$
- Pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $i = 0, \dots, n$





- Složitější křivky dělíme nejčastěji na kubiky
- **Spojitosť  $C^0$** : snadná
- **Spojitosť  $C^1$** : bod  $P_n = Q_0$  středem úsečky určené body  $P_{n-1}$  a  $Q_1$   
 $\vec{q}_0' = n(Q_1 - Q_0)$   
 $\vec{p}_1' = n(P_n - P_{n-1})$
- **Spojitosť  $G^1$** :  $P_{n-1}$ ,  $P_n = Q_0$  a  $Q_1$  leží na jedné přímce





- **Algoritmy:**

- naivní (neadaptivní)
- rekurzivní algoritmus de Casteljau



- **Zadání křivky:**  $Q(t) = \sum_{i=1}^n P_i B_i^n(t)$
- Postupně dosazujeme  $t$  a body spojíme úsečkami
- $\Delta t$  – konstantní (nestejně dlouhé úseky křivky)

- Výpočet bodu  $Q(t) = P_{n,n}$
- $P_{j,i}(t) = (1-t)P_{j-1,i-1} + tP_{j,i-1}$
- $i = 1, \dots, n$  a  $j = i, i + 1, \dots, n$
- **Vstup:** body řídicího polygonu ( $P_{i,0} = P_i$ )
- **Postup výpočtu**  $Q(1/2)$  ( $P_{3,3}$ )
- Každé rozdělení generuje dva nové řídicí polygony

