Cvičení 9 - Filtrování ve frekvenční doméně

Jak víte z konvolučního teorému, tak konvoluce v prostorové doméně odpovídá násobení matic (prvek po prvku) ve frekvenční doméně.

`f(x,y)*h(x,y) = H(u,v)F(u,v)`

(* označuje konvoluci)

Filtrování ve frekvenční doméně tedy probíhá tak, že převedeme obrázek do frekvenční domény, ten vynásobíme maticí filtru prvek po prvku (musí být stejně velká jako je obrázek) a převedeme zpět do prostorové domény. Tento proces je rychlejší, než filtrování pomocí konvoluce a navíc některé druhy šumu nelze jednoduše v prostorové doméně odfiltrovat, ale ve frekvenční ano (například periodický šum).

Hlavním úkolem je najít funkci `H(u,v)` (filter transfer function), která bude modifikovat `F(u,v)` požadovaným způsobem.

Příkladem by mohl být filtr, který bude potlačovat vysoké frekvence a násobit nízké. Za předpokladu, že máme F centrovaný (nízké frekvence uprostřed), pak by filtr filtr měl kolem středu vysoké hodnoty a dál od středu má hodnoty nulové (low pass filtr).

Víme, že `F` je periodická, stejně tak `H`. Z toho plyne, že i konvoluce v diskrétní frekvenční doméně. Z tohoto důvodu je konvoluce provedena za použití DFT circular covnolution. Jediný způsob, jak dosáhnout toho, že prostorová i circular konvoluce dávají stejný výsledek je, že se použije správný okraj obrázku (zero padding - jak jsme si říkali u prostorové konvoluce).

Není těžké si představit, že konvoluce periodické funkce může způsobit rušení mezi sousedními periodami pokud jsou tyto periody blízko sebe. Této inferenci se říká wraparound error a můžeme se jí vyhnout, pokud použijeme zero padding následujícím způsobem:

`f` .... velikosti `A x B`

`h` .... velikosti `C x D`

Vytvoříme rozšířené funkce tak, že přidáme 0 k `f` i `h` tak, aby obě měli velikost P x Q

$$P \geq A + C - 1$$

$$Q \geq B + D - 1$$

`paddedsize()`

Tato funkce zvolí nejmenší `P` a `Q`, která jsou sudá (kvůli efektivnímu vyýpočtu FFT) a splňují podmínky výše.

```
A = 100;
B = 200;
C = 21;
D = 20;

PQ = paddedsize([A B],[C D]);
display(PQ);
```

```
PQ = 1×2
   120   220
```

Abychom se vyhli wraparound error musíme v prostorové doméně "obalit" nulami obě funkce `f` i `h`

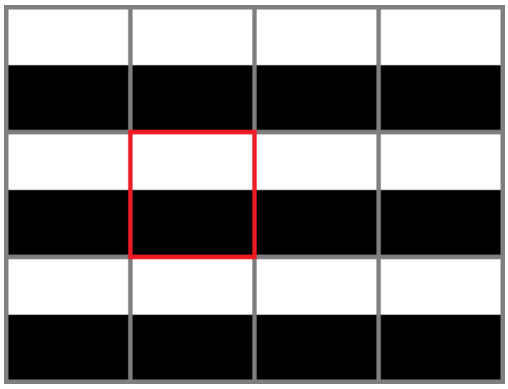
```
% Vytvoříme si obrázek
f = [ones(200,400);zeros(200,400)];
figure, imshow(f);
```

Zjistíme jeho velikost. Pomocí funkce `lpfilter` vytvoříme Gaussovský low pass filtr

```
[M, N] = size(f);
F = fft2(f);
sig=10; %sigma
H = lpfilter('gaussian' , M, N, sig) ;
G = H.*F;
g= ifft2(G);
figure, imshow(g);
```

V tomto případě jsme obrázku nepřidali dostatečný zero padding - výsledný obrázek je rozmazaný v horizovntálním směru, ale vertikální hrany ne.

Je to dáno tím, že obrázek je periodický a tedy tento příad vypadá nějak takto (cervený výřez je obrázek):

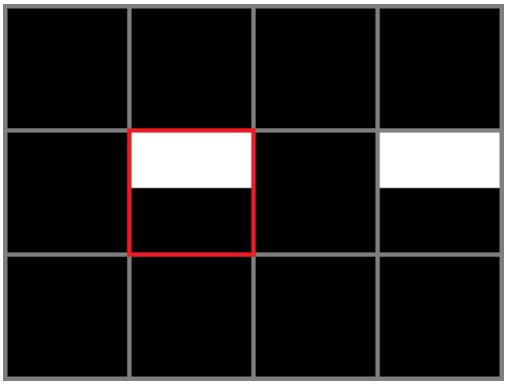


('cviceni10o1.png')

Při přidání zero-padding

```
PQ = paddedsize(size(f));
Fp = fft2(f, PQ(1), PQ(2)); %prida padding
Hp = lpfilter('gaussian', PQ(1), PQ(2), 2*sig);
Gp = Hp .* Fp ;
gp = ifft2(Gp);
gpc = gp(1:size(f,1), 1:size(f,2));
figure, imshow(gpc);
```

Obrázek je díky zero paddingu 2x tak velký. Zde je vidět i rozmazání ve vertikálním směru. Není to překvapivé, protože tento případ vypadá takto:



('cviceni10o2.png')

Postup filtrování:

1. získání optimální velikosti paddingu

`PQ = paddedsize(size(f))`

2. fourierova transformace obrázku s paddingem

`F = fft2(f, PQ(1), PQ(2))`

3. vytvoření filtru ve frekvenční doméně o velikosti `P x Q`. Pokud je filtr centrovaný, je nutné cetrovat i `F` (`fftshift()`), nebo decentrovat `H` (`ifftshift()`)

4. Vynásobení `H` a `F`

`G = H.*F`

5. Inverzní furierova transformace

`g = ifft2(G)`

6. Ořezání obrázku na původní velikost

`g = g(1:size(f,1), 1:size(f,2));`

Vytvořila jsem funkci `dftfilt()`, která jako vstup bere obrázek v prostorové doméně a filter transfer funkci a vrací vyfiltrovaný obrázek v prostorové doméně.

```
f = im2double(imread('a.png'));
```

Jak získat filtry?

Z filtrů v prostorové doméně

V matlabu k tomu je naprogramovaná funkce `freqz2()`, která převádí prostorový filtr do frekvenčního. Pro více informací:

```
help freqz2
```

freqz2 2-D frequency response.
   [H,Fx,Fy] = **freqz2**(h,Nx,Ny) returns H, the Ny-by-Nx frequency response
   of h, and the frequency vectors Fx (of length Nx) and Fy (of length
   Ny). h is a two-dimensional FIR filter, in the form of a computational
   molecule. Fx and Fy are returned as normalized frequencies in the range
   -1.0 to 1.0, where 1.0 corresponds to half the sampling frequency, or pi
   radians.

   [H,Fx,Fy] = **freqz2**(h,[Ny Nx]) returns the same result as [H,Fx,Fy] =
   freqz2(h,Nx,Ny).

   [H,Fx,Fy] = **freqz2**(h,N) uses [Ny Nx] = [N N].

   [H,Fx,Fy] = **freqz2**(h) uses [Ny Nx] = [64 64].

   [H,Fx,Fy] = **freqz2**(h,[Ny Nx],[Dx Dy]) or **freqz2**(h,Nx,Ny,[Dx Dy]) uses
   [Dx Dy] to specify the intersample spacing in h. Dx is the spacing in
   the X (or column) dimension, and Dy is the spacing in the Y (or row)
   dimension. The default value for Dx and Dy is 0.5. Changing Dx and Dy
   has the effect of changing the spread of values in Fx and Fy. For
   example, setting Dx to 0.25 instead of 0.5 causes the values in Fx to
   range from -2.0 to 2.0 instead of -1.0 to 1.0. Setting Dy to 1.0
   instead of 0.5 causes Fy to range from -0.5 to 0.5 instead of -1.0 to
   1.0.

   freqz2(h,[Ny Nx],D) and **freqz2**(h,Nx,Ny,D) use [Dx Dy] = [D D].

   H = **freqz2**(h,Fx,Fy) returns the frequency response for the FIR filter h
   at frequency values in Fx and Fy. These frequency values should be in
   the range -1.0 to 1.0, where 1.0 corresponds to half the sampling
   frequency, or pi radians.

   When used with no output arguments, **freqz2**(...) produces a mesh plot of
   the two-dimensional frequency response.

   Class Support

   The input matrix h can be of class double or of any numeric class. All
   other inputs to **freqz2** must be of class double. All outputs are of class
   double.

   Example

   Use the window method to create a 16-by-16 filter, then view its
   frequency response using **freqz2**.

       Hd = zeros(16,16);
       Hd(5:12,5:12) = 1;
       Hd(7:10,7:10) = 0;
       h = fwind1(Hd,bartlett(16));
       freqz2(h,[32 32]); axis([-1 1 -1 1 0 1]); colormap(jet(64))

   See also freqz.

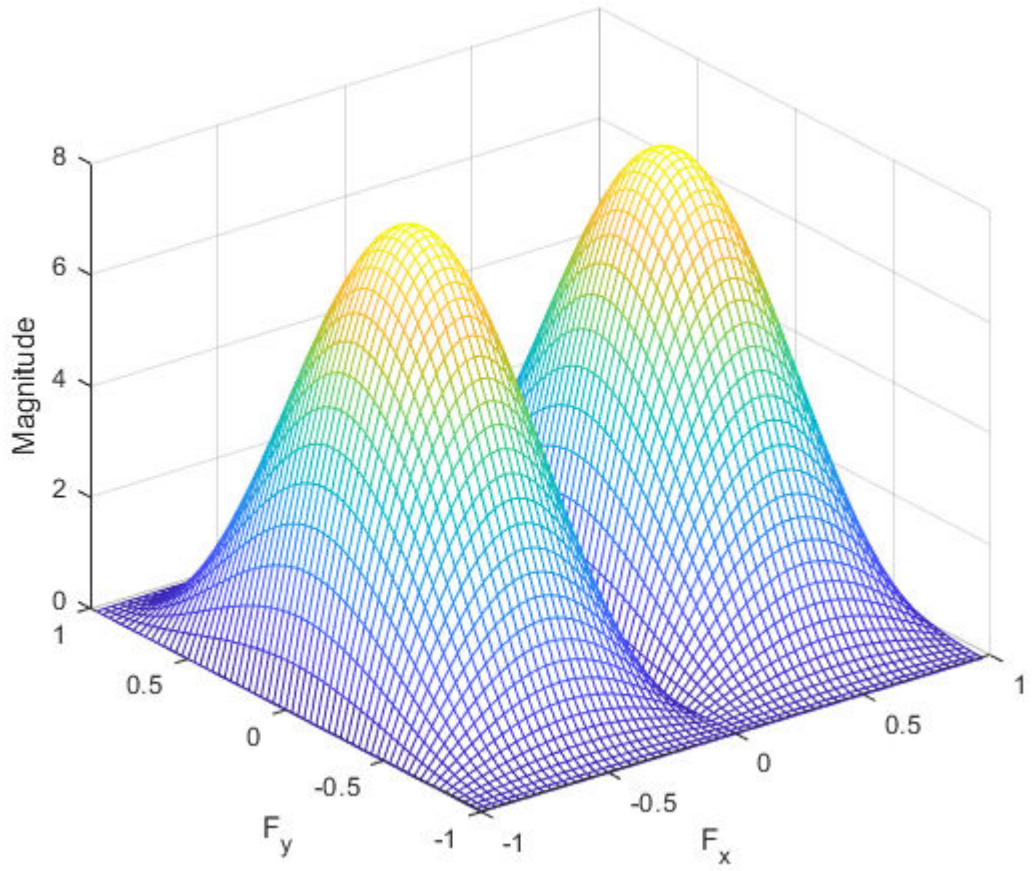
   Documentation for freqz2

```
h = fspecial('sobel')'; % filtr v prostorové doméně
display(h);
```

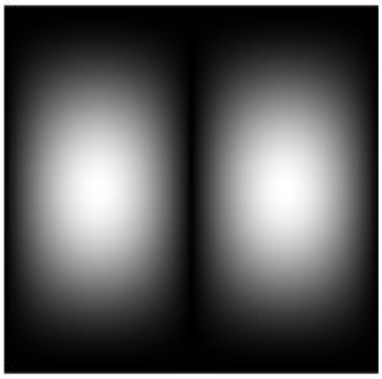
```
h = 3×3
     1     0    -1
     2     0    -2
```

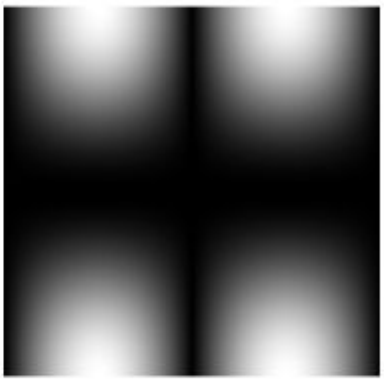
```
     1     0    -1
```

```
freqz2(h); % Převedení do frekvenční domény.
```

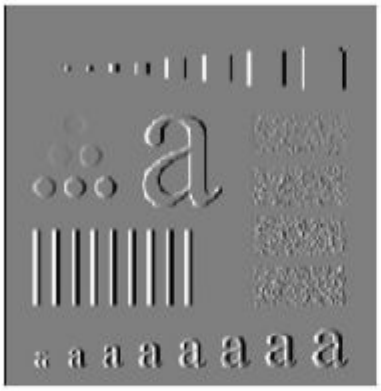


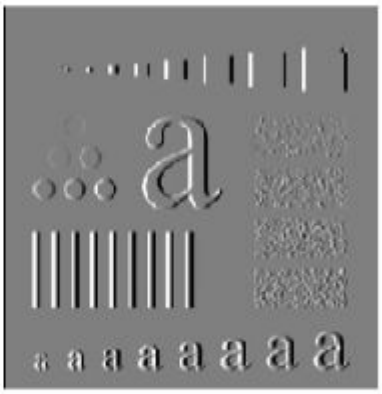

```
PQ = paddedsize(size(f));
H = freqz2(h, PQ(1), PQ(2)); % zde i se specifikací velikosti
H1 = fftshift(H);

% Zobrazení filtru a centrovaného filtru
figure,
subplot(1,2,1), imshow(abs(H), [ ]);
subplot(1,2,2), imshow (abs(H1), [ ]);
```





```
gs = imfilter(f, h);  % filtrování v prostorové doméně
gf = dftfilt(f, H1);  % filtrování ve frekvenční doméně

% porovnání výsledků.
figure,
subplot(1,2,1), imshow(gs, [ ]);
subplot(1,2,2), imshow(gf, [ ]);
```





gs a gf obsahují i záporné hodnoty. Proto se podíváme na absolutní hodnotu.

```
figure,
subplot(1,2,1),  imshow(abs(gs), []);
subplot(1,2,2), imshow(abs(gf), []);
```

když porovnáme výsledné obrázky zjistíme, že rozdíl je zanedbatelný

```
d = abs(gs - gf);
max(d(:)) % maximální rozdíl
```

```
ans = 3.1086e-15
```

```
min (d(:))
```

```
ans = 0
```

Generování filtrů ve frekvenční doméně

Většina filtrů je založena na tom, že jsou symetrické okolo středu. Bude se nám hodit funkce pro výpočet vzdálenosti bodu od specifikovaného bodu

funkce `dftuv(U,V)`

vytvoří meshgrid vzdáleností od počátku velikosti `U x V` (předpokládá se periodicita výsledku) podívejte se na kód jakým způsobem je vzdálenost počítána.

```
[U, V] = dftuv(8, 5);
DSQ = U.^2 + V.^2;
DSQ
```

```
DSQ = 8×5
     0     1     4     4     1
```

```
     1     2     5     5     2
     4     5     8     8     5
     9    10    13    13    10
    16    17    20    20    17
     9    10    13    13    10
     4     5     8     8     5
     1     2     5     5     2
```

vycentrujeme pomocí fftshift

```
fftshift(DSQ)
```

```
ans = 8×5
    20    17    16    17    20
    13    10     9    10    13
     8     5     4     5     8
     5     2     1     2     5
     4     1     0     1     4
     5     2     1     2     5
     8     5     4     5     8
    13    10     9    10    13
```

Low pass filtry

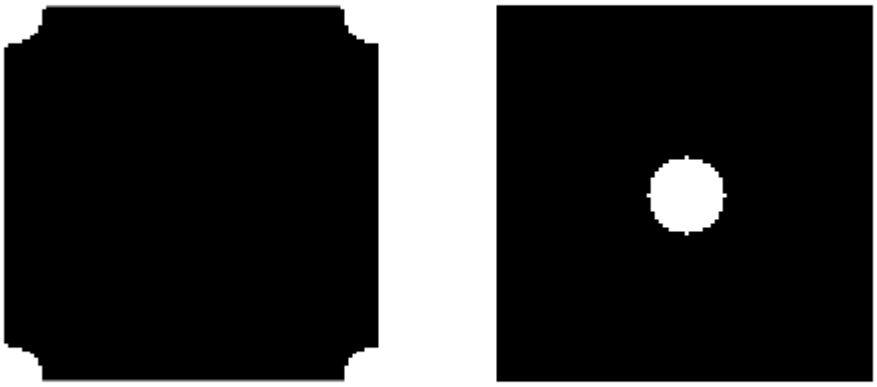
Slouží k potlacení nízkých frekvencí - rozmazání hran.

ÚKOL 1

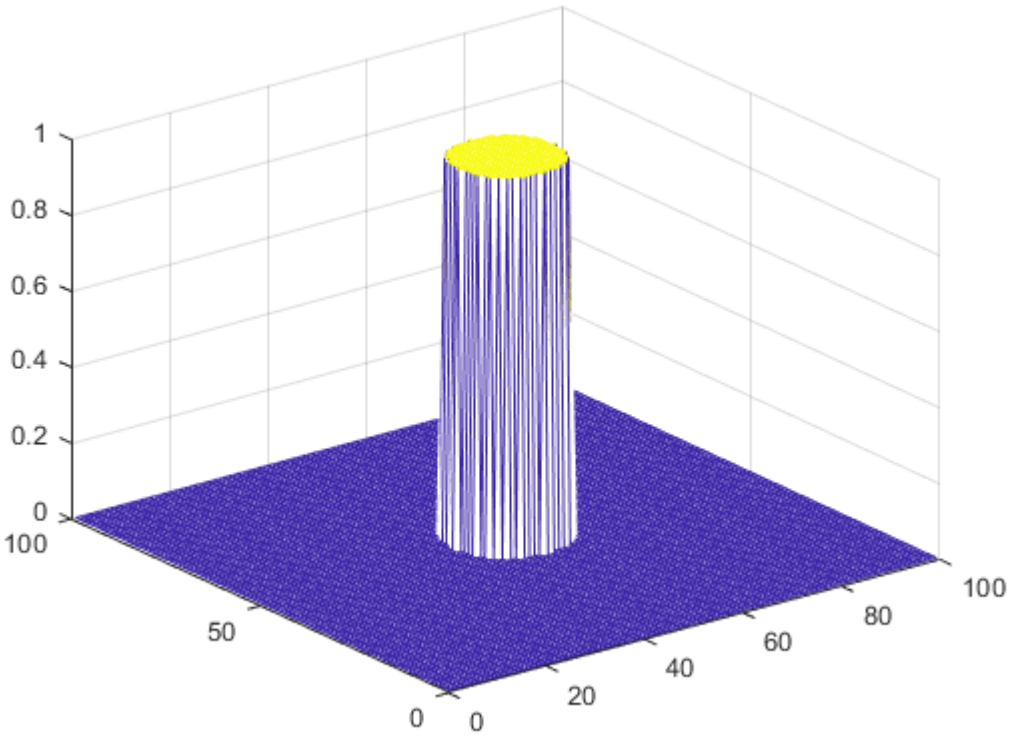
Vytvoření ideálního LP filtru doprogramujte do funkce `lpfilter`.

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

```
%H = lpfilter('ideal', 100, 100, 10);
H = my_lpfilter('ideal', 100, 100, 10);

figure,
subplot(1,2,1), imshow(H,[]);
subplot(1,2,2), imshow(fftshift(H),[]);
```



```
figure, mesh(fftshift(H)); % trojrozměrní zobrazení
```

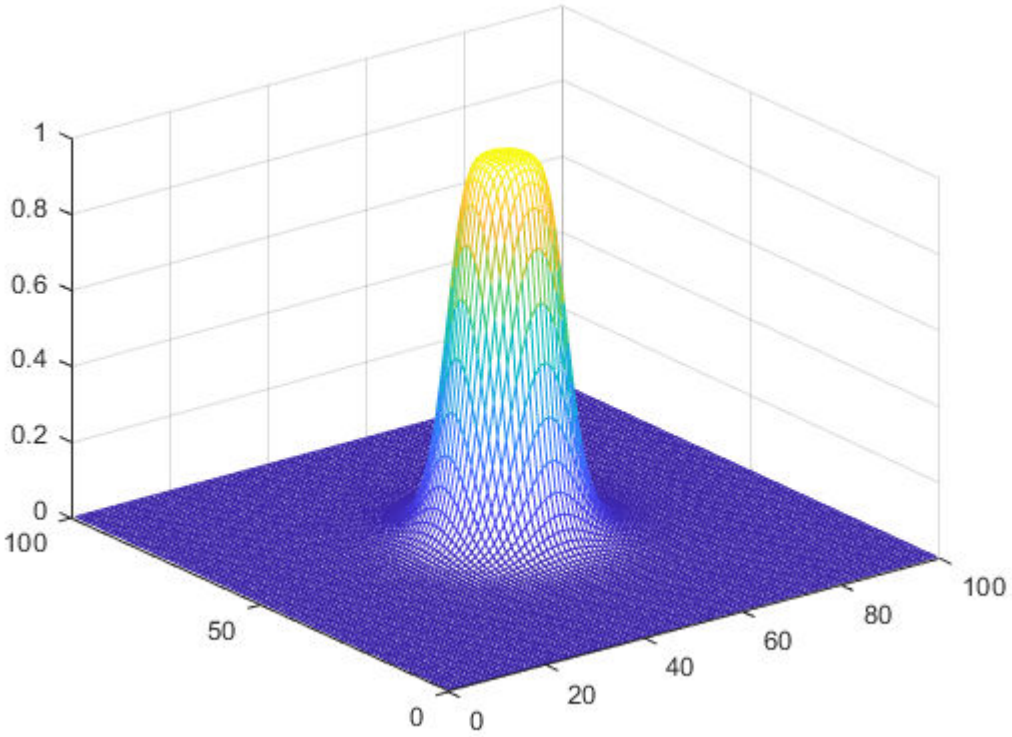


ÚKOL 2

Doprogramujte do `lpfilter()` Butterworth LP filtr

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

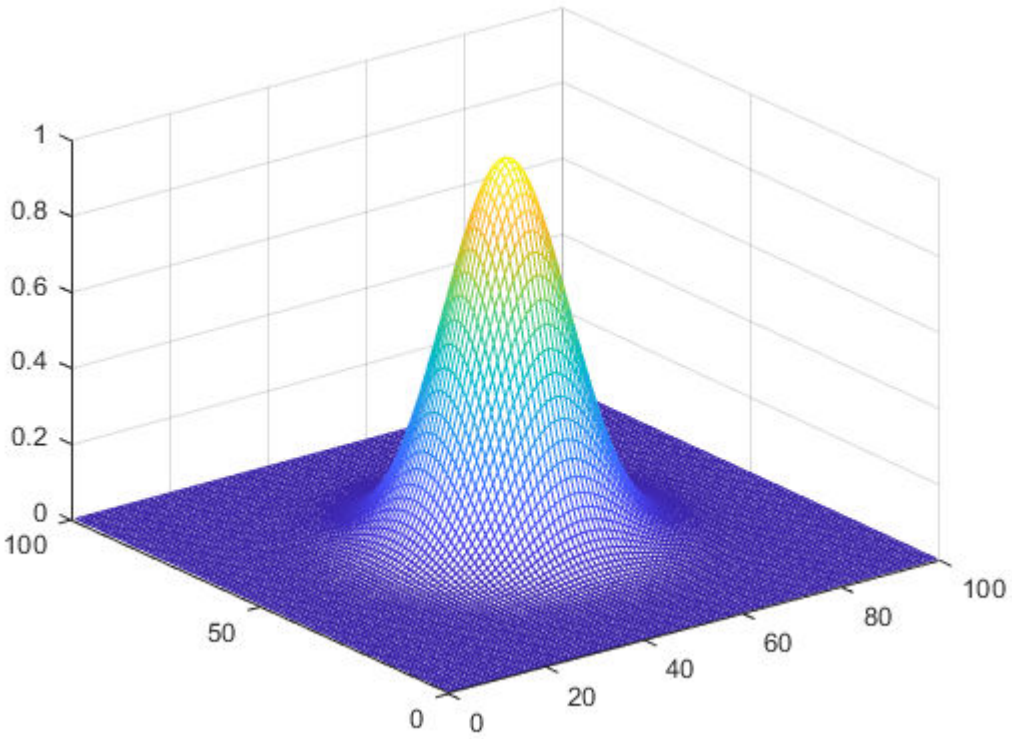
```
%H = lpfilter('btw', 100, 100, 10,3);
H = my_lpfilter('btw', 100, 100, 10,3);
%imshow(H,[]);
%figure, imshow(fftshift(H),[]);
figure, mesh(fftshift(H));
```



Gaussovský LP filtr je ve funkci lpfilter naprogramovaný.

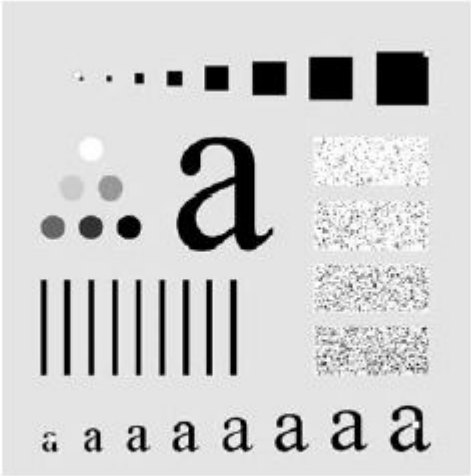
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

```
H = lpfilter('gaussian', 100, 100, 10);
%imshow(H,[]);
%figure, imshow(fftshift(H),[]);
figure, mesh(fftshift(H));
```



Aplikace lpfilteru

```
f = im2double(imread('a.png'));
PQ = paddedsize(size(f));
H = my_lpfilter('ideal', PQ(1), PQ(2), 500,2);
gf = dftfilt(f, H);
imshow(gf,[]);
```



ÚKOL 3

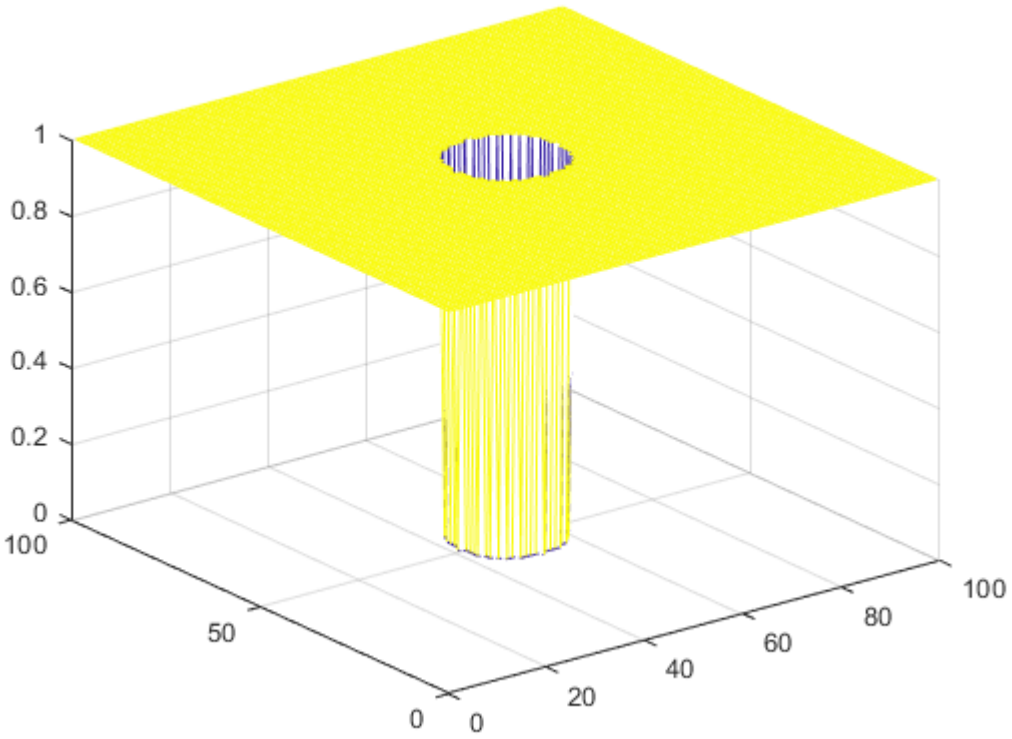
Porovnejte výsledné obrázky po aplikaci jednotlivých LP filtrů.

High pass filtry

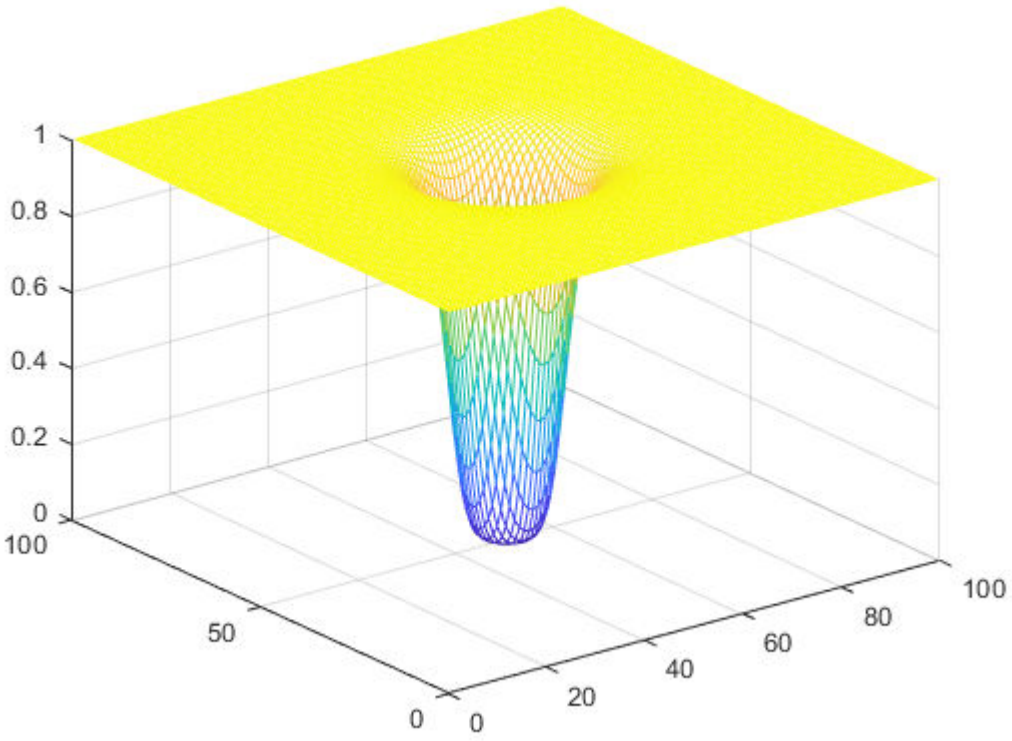
HP filtry zvýrazňují hrany a ostré přechody.

z LP filtrů získáme, tak, že je odečteme od jednotkové matice podívejte se na funci `hpfilter`

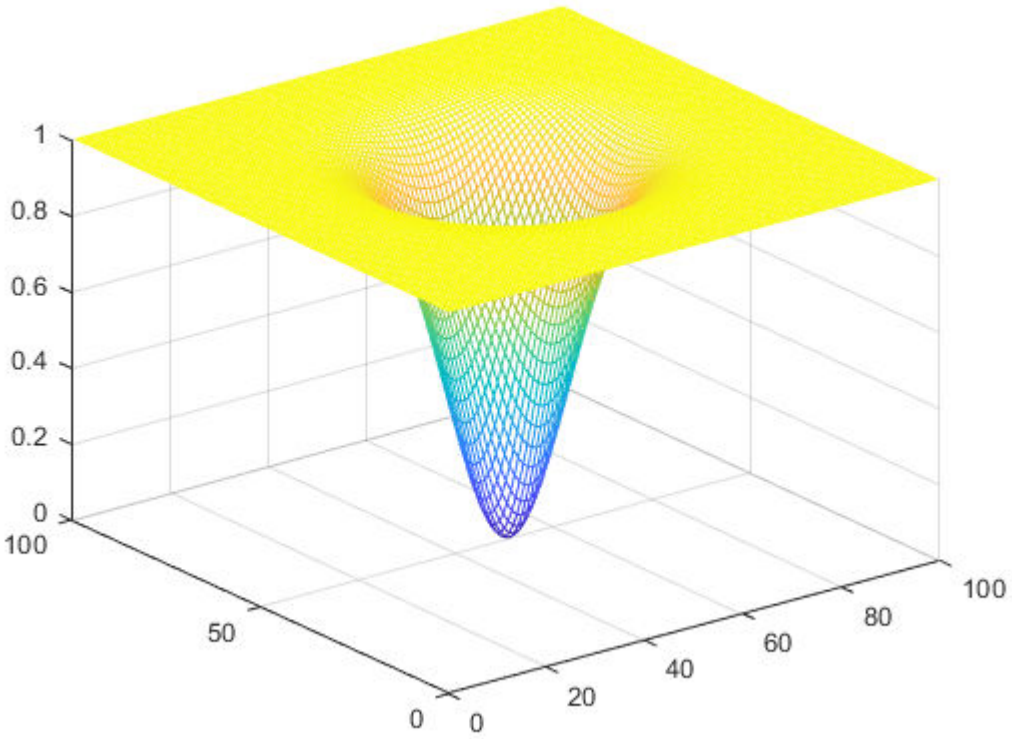
```
H = hpfilter('ideal', 100, 100, 10);
figure, mesh(fftshift(H));
```




```
H = hpfilter('btw', 100, 100, 10,3);
figure, mesh(fftshift(H));
```

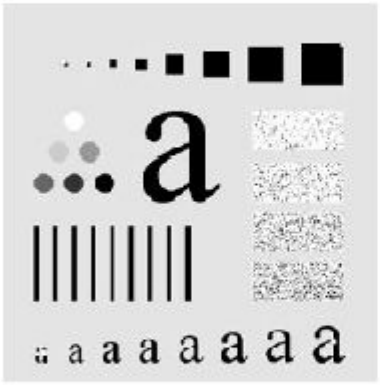



```
H = hpfilter('gaussian', 100, 100, 10);
figure, mesh(fftshift(H));
```



HP filtry zvýrazňují hrany a ostré přechody. ALE! jak víte, tak informace o průměrné hodnotě je uložena v prvku F(0,0) (dc koeficient), tento prvek jsme ale filtrem potlačili. Obrázek tedy ztratil většinu své barevné informace

```
f = im2double(imread('a.png'));
PQ = paddedsize(size(f));
D0 = 0.05*PQ(1);
H = hpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),D0);
g = dftfilt(f,H);

figure,
subplot(1,2,1), imshow(f);
subplot(1,2,2), imshow(g);
```



Tím, že je odstraněn dc koeficient, bere se, že průměrná hodnota je 0. Abychom toto kompenzovali, tak se přidává k výslednému obrázku offset. Pokud navíc vynásobíme filtr nějakým koeficientem větším než 1, dostaneme tzv. high-frequency emhasis filter.

```
f = im2double(imread('a.png'));
PQ = paddedsize(size(f));
D0 = 0.05*PQ(1);
H = hpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),D0);
g = dftfilt(f,H);
H2 = 0.5+2*H;
g2 = dftfilt(f,H2);

figure,
subplot(1,2,1), imshow(g);
subplot(1,2,2), imshow(g2);
```

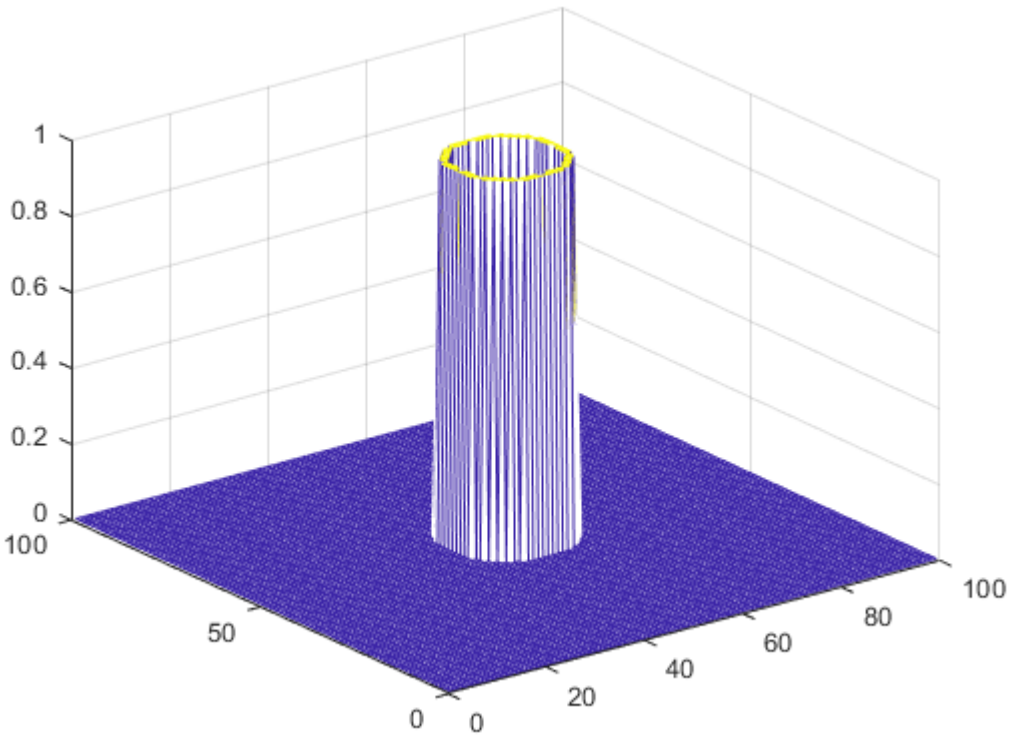
Selektivní filtry

pokud nechceme odstranit všechny nízké/vysoké frekvence, jen nějaké určité, použijeme tzv. selektivní filtry.

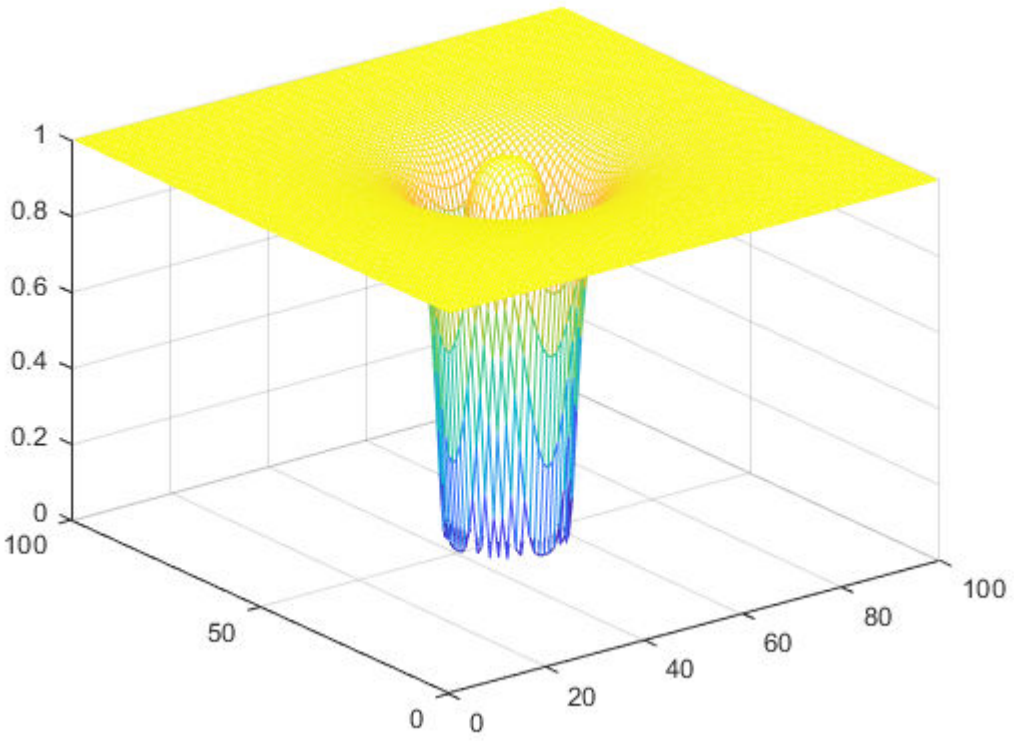
Band reject/pass filtr

prvním příkladem je band reject/pass filtr. Která je snadné zkonstruovat z LPF a HPF.

```
H = bandfilter('ideal', 'pass', 100, 100, 10, 2, 0);
figure, mesh(fftshift(H));
```




```
H = bandfilter('btw', 'reject', 100, 100, 10, 2, 3);
figure, mesh(fftshift(H));
```

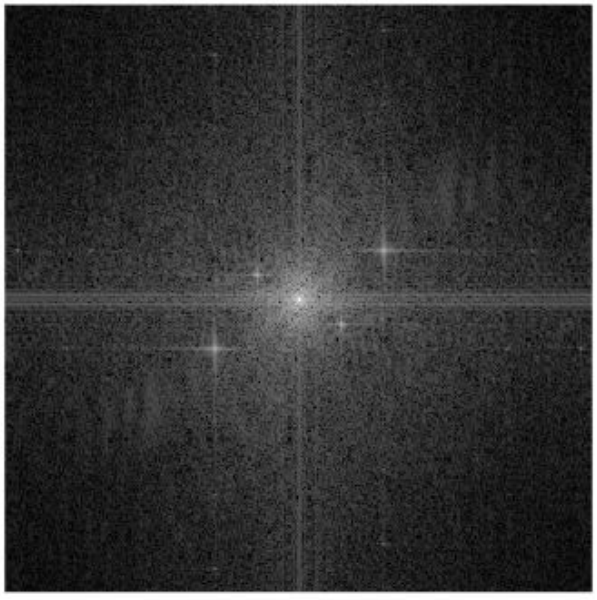


NOTCH

Nejužitečnější filtry. Potlačují, nebo zvýrazňují hodnoty ve speciálním okolí (kolem středu frekvenčního obdélníku). Musí být symetrické kolem středu. Pokud je střed notche v `(u0,v0)` pak musí být notch i v `(-u0,-v0)`. Konstruují se stejně jako high pass (low pass) filry, ale posunuté do středu notche. Typickým použitím je použití na filtraci periodického šumu. Viz následující příklad. Když si zobrazíme spektrum vidíme vysoké frekvence i mimo střed. Tyto vysoké frekvence budeme chtít odfiltrovat.

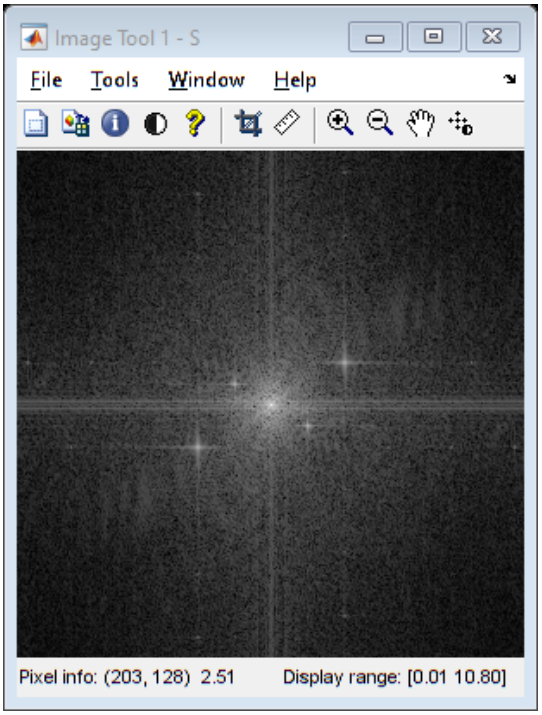
```
f = im2double(rgb2gray(imread('ClownOrig.jpg')));
[M,N] = size(f);
figure, imshow(f);
```

```
F = fft2(f);
S = fftshift(log(1+abs(F)));
figure, imshow(S,[]);
```



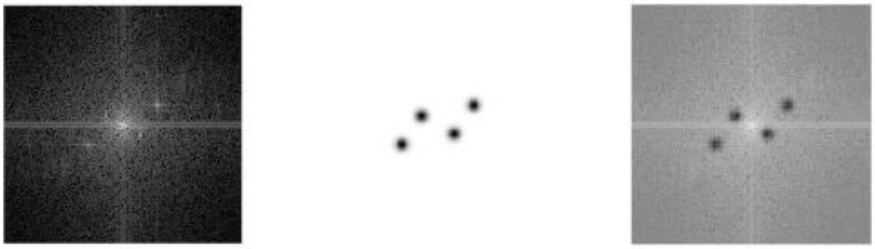
Pomocí imtool nástroje můžeme zjistit středy notchů

```
imtool(S,[]);
```



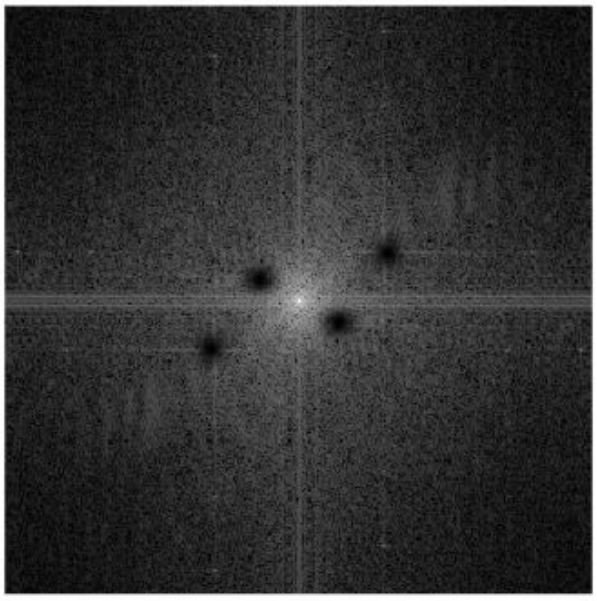
Např. notch zde:

```
C1 = [136 127;
      123 191];
H1 = cnotch('gaussian','reject', M,N,C1,5);

figure,
subplot(1,3,1), imshow(S,[]);
subplot(1,3,2), imshow(fftshift(H1),[]);
subplot(1,3,3), imshow(imfuse(fftshift(H1), S, 'blend'));
```



aplikace

```
P1 = fftshift(H1).*S;
figure, imshow(P1,[]);
```



```
g1 = dftfilt(f, H1);
figure
subplot(1,2,1),imshow(f);
subplot(1,2,2), imshow(g1);
```

ÚKOL 4

zkuste z obrázku odfiltrovat i periodický šum, který je stále přítomný na okrajích obrázku.

Rekonstrukce obrazu

Operace s obrázky můžeme rozdělit na 2 skupiny. Jednak jsou to operace, které SUBJEKTIVNĚ vylepšují vzhled obrázku. Uživatel přímo sám podle svého subjektivního vnímání říká, zda se mu tento vzhled líbí, hodí ke konkrétní aplikaci a pod. Mezi takové operace patří jasové transformace, geometrické operace. Druhou skupinu pak tvoří operace, které OBJEKTIVNĚ vylepšují vzhled obrázku. Jsou jimi metody rekonstrukce obrazu. Jsou založené na nějakém matematickém modelu degradace obrazu.

Matematický model degradace:

Máme vstupní obraz `f`, který je degradován funkcí `H` plus k tomuto obrazu může být přidána funkce šumu. Degradovaný obraz tedy získáme:

```
g = H(f) + n
```

Pokud máme nějaké informace o degradační funkci a šumu, můžeme odhadnout originální obraz `f` (což je úkolem rekonstrukce obrazu).

Degradační funkci můžeme modelovat pomocí konvoluce (*) v prostorové doméně:

`g = h*f + n`

Případně z konvolučního teorému víme, že to odpovídá násobení ve frekvenční doméně.

`G = HF + N`

Šum

Pokud je obraz degradovaný pouze šumem pak

`G = F + N`

Pokud chceme odstranit pouze šum, pak potřebujeme znát model šumu. Zajímají nás parametry, které definují šum a zda je šum korelovaný s obrazem (zda je hodnota šumu závislá na hodnotě pixelu). Pokud budeme předpokládat, že šum není korelovaný s obrazem, pak se budeme zajímat o statistické chování intenzit v šumu, to můžeme chápat jako náhodné proměnné charakterizované probabilistickou funkcí (probability density function PDF)

Šum můžeme do obrazu přidat pomocí funkce `imnoise()`

`g = imnoise(f, type, parameters)`

`F` je vstupní obraz, type a parameters jsou argumenty, které se vážou na to, jaký chceme do obrazu přidat.

```
help imnoise
```

```
  imnoise Add noise to image.
     J = imnoise(I,TYPE,...) Add noise of a given TYPE to the intensity
     image I. TYPE is a string or char vector that can have one of these
     values:

         'gaussian'       Gaussian white noise with constant
                          mean and variance

         'localvar'       Zero-mean Gaussian white noise
                          with an intensity-dependent variance

         'poisson'        Poisson noise

         'salt & pepper'  "On and Off" pixels

         'speckle'        Multiplicative noise

     Depending on TYPE, you can specify additional parameters to imnoise. All
     numerical parameters are normalized; they correspond to operations with
     images with intensities ranging from 0 to 1.

     J = imnoise(I,'gaussian',M,V) adds Gaussian white noise of mean M and
     variance V to the image I. When unspecified, M and V default to 0 and
     0.01 respectively.

     J = imnoise(I,'localvar',V) adds zero-mean, Gaussian white noise of
     local variance, V, to the image I.  V is an array of the same size as I.

     J = imnoise(I,'localvar',IMAGE_INTENSITY,VAR) adds zero-mean, Gaussian
     noise to an image, I, where the local variance of the noise is a
     function of the image intensity values in I.  IMAGE_INTENSITY and VAR
     are vectors of the same size, and PLOT(IMAGE_INTENSITY,VAR) plots the
```

```
functional relationship between noise variance and image intensity.
IMAGE_INTENSITY must contain normalized intensity values ranging from 0
to 1.

J = imnoise(I,'poisson') generates Poisson noise from the data instead
of adding artificial noise to the data.  If I is double precision,
then input pixel values are interpreted as means of Poisson
distributions scaled up by 1e12.  For example, if an input pixel has
the value 5.5e-12, then the corresponding output pixel will be
generated from a Poisson distribution with mean of 5.5 and then scaled
back down by 1e12.  If I is single precision, the scale factor used is
1e6.  If I is uint8 or uint16, then input pixel values are used
directly without scaling.  For example, if a pixel in a uint8 input
has the value 10, then the corresponding output pixel will be
generated from a Poisson distribution with mean 10.

J = imnoise(I,'salt & pepper',D) adds "salt and pepper" noise to the
image I, where D is the noise density.  This affects approximately
D*numel(I) pixels. The default for D is 0.05.

J = imnoise(I,'speckle',V) adds multiplicative noise to the image I,
using the equation J = I + n*I, where n is uniformly distributed random
noise with mean 0 and variance V. The default for V is 0.05.

Note
----
The mean and variance parameters for 'gaussian', 'localvar', and
'speckle' noise types are always specified as if for a double image
in the range [0, 1].  If the input image is of class uint8 or uint16,
the imnoise function converts the image to double, adds noise
according to the specified type and parameters, and then converts the
noisy image back to the same class as the input.

Class Support
-------------
For most noise types, I can be uint8, uint16, double, int16, or
single.  For Poisson noise, int16 is not allowed. The output
image J has the same class as I.  If I has more than two dimensions
it is treated as a multidimensional intensity image and not as an
RGB image.

Example
-------
     I = imread('eight.tif');
     J = imnoise(I,'salt & pepper', 0.02);
     figure, imshow(I), figure, imshow(J)

See also rand, randn.

Documentation for imnoise
Other functions named imnoise
```

Použití

```
f = imread('obr2.png');
%g = imnoise(f,'salt & pepper',0.02);
g = imnoise(f,'gaussian',0, 0.01);

subplot(1,2,1), imshow(f,[]);
subplot(1,2,2), imshow(g,[]);
```

ÚKOL 5

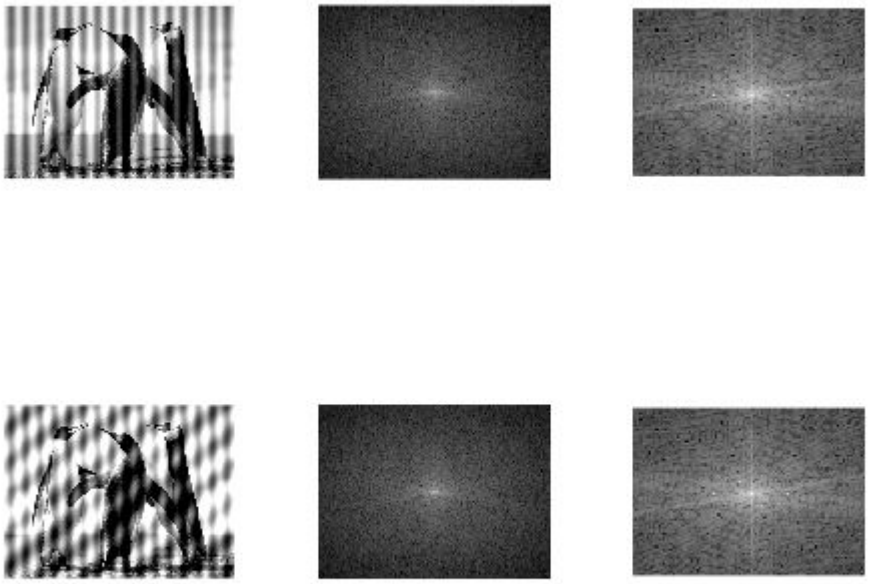
Vyzkoušejte si přidat do obrazu různé typy šumu a pohrajte si i s velikostí ostatních parametrů.

Periodický šum

První šum, který uvažujeme a je závislý na hodnotě pixelů. Tento šum je vhodné filtrovat ve frekvenční doméně.

```
f = im2double(imread('obr2.png'));

x = linspace(0,1 ,size(f,2));
y = linspace(0,1 ,size(f,1));
[X, Y] = meshgrid(x, y);

sum1 = f + 0.25*cos(32*pi*X);
sum2 = sum1 + 0.25*sin(10*pi*(X+Y));

S1 = fftshift(log(1+abs(fft2(sum1))));
S2 = fftshift(log(1+abs(fft2(sum2))));

figure,
subplot(2,3,1), imshow(sum1);
subplot(2,3,2), imshow(S1, []);
subplot(2,3,3), imshow(S1(348:420,462:562), []);
subplot(2,3,4), imshow(sum2);
```

```
subplot(2,3,5), imshow(S2, []);
subplot(2,3,6), imshow(S2(348:420,462:562), []);
```

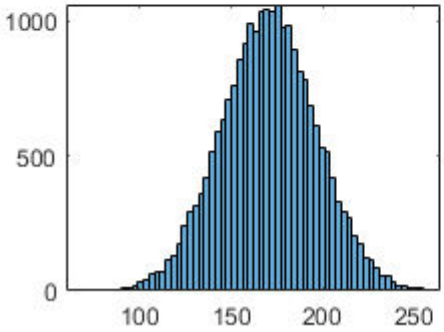


Odstranění šumu

Odhad parametrů šumu

Periodický šum se od ostatních snadno rozezná. vypadá, jako by byl do obrazu přidán nějaký pravidelný vzor. Ostatní typy šumu se odhadují podle PDF. A to konkrétně tak, že se vezme část obrazu s relativně konstantním pozadím a vypočítá se histogram a z jeho tvaru se odvodí typ a jiné parametry šumu (průměr, variance).

```
f = imread('obr2.png');
%g = imnoise(f,'salt & pepper',0.02);
g = imnoise(f,'gaussian',0, 0.01);
subf =g(1:150,1:150); %výběr části obrázku
%imshow(subf);

figure,
subplot(2,2,1), imshow(f);
subplot(2,2,2), imshow(subf);
subplot(2,2,3), histogram(subf)
```



U periodického šumu se parametry odhadují analýzou fourierova spektra. Výkyvy jsou znatelné pouhým okem. Je možná i automatická analýza, pokud jsou výkyvy hodně znatelné, nebo známe nějakou vlastnost šumu.

Pokud je obraz degradován pouze šumem, převážně se používají filtry v prostorové doméně (viz cvičení 5 = lineární filtry imfilter, nelineární medfilt2).

K odstranění periodického šumu se používají Notch reject filtry.