Faktorové grupy

Algebra 2

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Levé a pravé třídy grup

Příklad (Příklad 48)

Grupa $\mathbb{Z}_6$ je abelovská. Najděte rozklad $\mathbb{Z}_6$ na třídy podle podgrupy $H = \{0,3\}$.

- Třída obsahující 0: $\{0,3\}$.
- Třída obsahující 1: $1 + \{0,3\} = \{1,4\}$.
- Třída obsahující 2: $2 + \{0,3\} = \{2,5\}$.

$+_6$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	1	4
4	5	2	0	3	4	1

Třídy rozkladu spolu s operací, kterou vidíme v tabulce (operace na 3 barvách) tvoří grupu. Pojmenujeme ji **faktorová grupa**.

Levé a pravé třídy grup

Příklad (Příklad 49)

Pro grupu symetrickou grupu S_3 vezmeme její podgrupu $\langle \mu_1 \rangle = \{\rho_0, \mu_1\}$. Najděte její levé a pravé třídy dle této podgrupy.

- Levé:
  $H = \{\rho_0, \mu_1\}$
  $\rho_1 H = \{\rho_1\rho_0, \rho_1\mu_1\} = \{\rho_1, \mu_3\}$
  $\rho_2 H = \{\rho_2\rho_0, \rho_2\mu_1\} = \{\rho_2, \mu_2\}$
- Pravé:
  $H = \{\rho_0, \mu_1\}$
  $H\rho_1 = \{\rho_0\rho_1, \mu_1\rho_1\} = \{\rho_1, \mu_2\}$
  $H\rho_2 = \{\rho_0\rho_2, \mu_1\rho_2\} = \{\rho_2, \mu_3\}$

Tabulka pro levé třídy:

$\circ$	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
ρ_0	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
μ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1
ρ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1
μ_3	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2
ρ_2	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3
μ_2	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0

Levé a pravé třídy nejsou shodné. Z tabulky vidíme, že takovou grupu nedostaneme.

Levé a pravé třídy grup

Příklad (Příklad 50)

Vypočítejte levé a pravé třídy pro podgrupu $\langle \rho_1 \rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

- Levé i pravé:

$$\underline{H} = \{\rho_0, \mu_1\}$$
$$\rho_1 H = \{\rho_1\rho_0, \rho_1\mu_1\} = \{\rho_1, \mu_3\}$$
$$\rho_2 H = \{\rho_2\rho_0, \rho_2\mu_1\} = \{\rho_2, \mu_2\}$$

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Levé a pravé třídy jsou stejné a zjevně dostáváme grupu isomorfní se $\mathbb{Z}_2$

Faktorové grupy

Věta 33

Nechť $\phi : G \to G'$ *je homomorfismus grup a* $H = Ker(\phi)$. *Pak třídy* H *tvoří* **faktorovou grupu** G/H *(čteme* G *modulo* H*)*, kde $(aH)(bH) = (ab)H$.
Zobrazení $\mu : G/H \to \phi[G]$ *definované* $\mu(aH) = \phi(a)$ *je isomorfismus,*
Součin tříd i μ *jsou dobře definované, nezávislé na výběru* a *a* b *z tříd.*

Důkaz

Nechť $\phi : G \to G'$ *je homomorfismus,* $H = Ker(\phi)$. *Z věty 32 víme, že* ϕ *určuje třídy rozkladu.*
$\phi^{-1}[\{\phi(a)\}] = \{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\}$ *je levá třída* aH *(i pravá třída* Ha*).*
Tedy máme bijekci mezi aH *a* $\phi(a)$.

Faktorové grupy

Důkaz (Pokračování)

Množina G/H*, která má stejnou kardinalitu jako* $\phi[G]$*. Pak existuje bijekce*
$\mu : G/H \to \phi[G]$.
Operaci v $\phi[G]$ *můžeme pro všechna* $x, y \in \phi[G]$ *definovat následovně:*
pokud $\mu(x) = g_1$ *a* $\mu(y) = g_2$ *a* $\mu(z) = g_1 g_2$*, pak* $xy = z$.
Je vidět, že se jedná o isomorfismus (je splněna podmínka homomorfismu).
$\mu(xy) = \mu(z) = g_1 g_2 = \mu(x)\mu(y)$
V řeči tříd:
pokud $\mu(xH) = \phi(x)$ *a* $\mu(yH) = \phi(y)$ *a* $\mu(zH) = \phi(x)\phi(y)$*, pak* $(xH)(yH) = zH$.
Protože je ϕ *homomorfismus, snadno najdeme* $z \in G$ *takové, že* $\mu(zH) = \phi(x)\phi(y)$.
Konkrétně vezmeme $z = xy$ *v* G.
$\mu(zH) = \mu(xyH) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Faktorové grupy

Důkaz (Pokračování)

Součin dvou tříd $(xH)(yH) = (xy)H$. *Záleží na volbě* $x \in xH$ *a* $y \in yH$? *Ne.*
Máme-li $h_1, h_2 \in H$ *takové, že* $xh_1 \in xH$ *a* $yh_2 \in yH$, *pak existuje* $h_3 \in H$ *takové, že* $h_1 y = yh_3$ *(protože jsou levé a pravé třídy stejné, tak* $Hy = yH$*) máme tedy*
$(xh_1)(yh_2) = x(h_1 y)h_2 = x(yh_3)h_2 = (xy)(h_3 h_2) \in (xy)H$
a tedy dostáváme stejnou třídu.

Výpočet součinu dvou tříd – vybereme libovolný prvek z každé třídy, vynásobíme je v G a najdeme třídu, která obsahuje výsledek.

Faktorové grupy

Příklad 64

Uvažujme $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, *kde* $\gamma(m)$ *je zbytek po celočíselném dělení čísla* m *číslem* n.
Je γ *homomorfismus?*
Jak vypadá $Ker(\gamma)$*?*
Jak vypadají třídy rozkladu?

Faktorové grupy

Příklad

Uvažujme $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, kde $\gamma(m)$ je zbytek po celočíselném dělení čísla m číslem n. Je γ homomorfismus? Jak vypadá $Ker(\gamma)$? Jak vypadají třídy rozkladu?

- **Homomorfismus?** Ano. Platí podmínka homomorfismu.
- $Ker(\gamma) = n\mathbb{Z}$
- **Třídy rozkladu**: Například pro $n = 3$

$$
\begin{aligned}
3\mathbb{Z} &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} \\
1 + 3\mathbb{Z} &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} \\
2 + 3\mathbb{Z} &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}
\end{aligned}
$$

- Isomorfismus $\mu : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ z předchozí věty přiřazuje každé třídě její nejmenší nezáporný prvek
  $\mu(3\mathbb{Z}) = 0,\ \mu(1 + 3\mathbb{Z}) = 1,\ \mu(2 + 3\mathbb{Z}) = 2$

Faktorové grupy

Příklad 65

Uvažujme faktorovou grupu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jak je definovaný součet prvků? Například $(2+5\mathbb{Z})+(4+5\mathbb{Z})$?

- **Třídy rozkladu**:

$$\begin{aligned} 5\mathbb{Z} &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\} \\ 1+5\mathbb{Z} &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\} \\ 2+5\mathbb{Z} &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\} \\ 3+5\mathbb{Z} &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\} \\ 4+5\mathbb{Z} &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} \end{aligned}$$

Faktorové grupy

Příklad

Uvažujme faktorovou grupu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Jak je definovaný součet prvků? Například $(2+5\mathbb{Z})+(4+5\mathbb{Z})$?

- **Třídy rozkladu**:

$$\begin{aligned} 5\mathbb{Z} &= \{\dots,-10,-5,0,5,10,\dots\} \\ 1+5\mathbb{Z} &= \{\dots,-9,-4,1,6,11,\dots\} \\ 2+5\mathbb{Z} &= \{\dots,-8,-3,2,7,12,\dots\} \\ 3+5\mathbb{Z} &= \{\dots,-7,-2,3,8,13,\dots\} \\ 4+5\mathbb{Z} &= \{\dots,-6,-1,4,9,14,\dots\} \end{aligned}$$

- Vybereme libovolné prvky z tříd např. $2 \in (2+5\mathbb{Z})$ a $4 \in (4+5\mathbb{Z})$
- $2+4=6,\ 6 \in (1+5\mathbb{Z})$
- Vybereme jiné prvky z tříd např. $-8 \in (2+5\mathbb{Z})$ a $9 \in (4+5\mathbb{Z})$
- $-8+9=1,\ 1 \in (1+5\mathbb{Z})$

Faktorové grupy

Definice

Třídám rozkladu dle $n\mathbb{Z}$ *říkáme* **zbytkové třídy modulo** n*.*
Odtud pojem, že G/H *nazýváme* **faktorová grupa** G **modulo** H*.*
Prvky ve stejné třídě rozkladu dle H *nazýváme* **prvky kongruentní modulo** H

Faktorové grupy

nyní definujeme faktorové grupy z normálních podgrup.

Věta 34

Nechť H je podgrupa grupy G. Pak součin levých tříd je dobře definovaný rovnicí
$(aH)(bH) = (ab)H$
právě, když je H normální.

Důkaz

Předpokládejme že $(aH)(bH) = (ab)H$ dá dobře definovanou operaci. Chceme ukázat, že H je normální tedy $aH = Ha$.
$\subseteq$*: nechť $x \in aH$*
Když $x \in aH$ a $a^{-1} \in a^{-1}H$, pak $(xH)(a^{-1}H) = (xa^{-1})H$.
Když $a \in aH$ a $a^{-1} \in a^{-1}H$, pak $(aH)(a^{-1}H) = eH = H$.
Předpokládali jsme, že je funkce dobře definovaná, pak $xa^{-1} = h \in H$. $x = ha$, takže $x \in Ha$ a $aH \subseteq Ha$.

$\supseteq$ *by se dokazovalo obdobně.*

Faktorové grupy

Důkaz (Pokračování)

Předpokládejme že H je normální podgrupa. Chceme ukázat, že $(aH)(bH) = (ab)H$ dá dobře definovanou operaci.

Dle předpokladu, že je h normální, je jedno, zda budeme počítat s levými nebo pravými třídami.

Předpokládejme, že chceme spočítat $(aH)(bH)$. Vybereme $a \in aH$ a $b \in bH$. Dostaneme třídu $(ab)H$.

Vybereme jiné reprezentanty $ah_1 \in aH$ a $bh_2 \in bH$, dostaneme $(ah_1bh_2)H$.

Chceme ukázat, že $(ab)H = (ah_1bh_2)H$.

$h_1b \in Hb = bH$, takže $h_1b = bh_3$ pro nějaké $h_3 \in H$. Tedy

$(ah_1)(bh_2) = a(h_1b)h_2 = a(bh_3)h_2 = (ab)(h_3h_2)$.

$(ab)(h_3h_2) \in (ab)H$.

Takže ah_1bh_2 je v $(ab)H$.

Faktorové grupy

Důsledek 9

Nechť H je normální podgrupa grupy G. Pak třídy rozkladu G dle H s operací $(aH)(bH) = (ab)H$ tvoří grupu G/H.

Důkaz

asociativita:

$(aH)[(bH)(cH)] = (aH)[(bc)H] = [a(bc)]H$

$[(aH)(bH)](cH) = [(abH)](c)H = [(ab)c]H$

zbytek plyne z asociativity v G.

Existence neutrálního prvku:

$eH = H$ *je neutrální prvek, protože:*

$(aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH)$

Inverzní prvky:

$(aH)^{-1} = a^{-1}H$

protože

$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = (aa^{-1})H = (aH)(a^{-1}H)$

Faktorové grupy

Definice

Grupa G/H z předchozího důsledku je **faktorová grupa G dle H**.

Příklad 66

Protože $\mathbb{Z}$ je abelovská grupa, její podgrupy jsou normální. Tedy i podgrupa $n\mathbb{Z}$.
Díky předchozímu důsledku můžeme zkonstruovat faktorovou grupu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bez odkazování se na konkrétní homomorfismus.

Faktorové grupy

Příklad 67

Jak vypadá faktorová grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *dle* $(\{-1, 1\}, \cdot)$*?*

Faktorové grupy

Příklad

Jak vypadá faktorová grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *dle* $(\{-1, 1\}, \cdot)$*?*

- $\{-1, 1\}$ je jistě podgrupa, díky tomu, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní, je normální
- Třídy rozkladu:
  $\{\{-1, 1\}, \{-3, 3\}, \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, \dots\}$
  $\{\{-x, x\} | x \in \mathbb{R}^+\}$
- Operace – klasické násobení $\cdot$ **Ověřte.**

Základní věta o homomorfismu

Věta 35

Nechť H *je normální podgrupa* G. *Pak zobrazení* $\gamma : G \to G/H$ *dané předpisem* $\gamma(x) = xH$ *je homomorfismus s jádrem* H.

Důkaz

Nechť $x, y \in G$. *Pak*

$\gamma(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \gamma(x)\gamma(y)$

takže je γ *homomorfismus.*

Protože $xH = H$ *právě, když* $x \in H$, *vidíme, že jádro* γ *je skutečně* H.

Základní věta o homomorfismu

Věta 36 (Základní věta o homomorfismu)

Nechť $\phi : G \to G'$ *je homomorfismus grup s jádrem* H*.*
Pak $\phi[G]$ *je grupa a zobrazení* $\mu : G/H \to \phi[G]$*, dané předpisem* $\mu(gH) = \phi(g)$*, je isomorfismus.*
Pokud $\gamma : G \to G/H$ *je homomorfismus daný* $\gamma(g) = gH$*, pak* $\phi(g) = \mu\gamma(g)$ *pro každé* $g \in G$*.*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \phi[G] \\
& G/H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

Isomorfismus μ se nazývá **přirozený** (kanonický) isomorfismus.
Stejně tak γ.
Pro tyto grupy může existovat více homomorfismů (i isomorfismů), ale tyto mají speciální vztah k ϕ.

Základní věta o homomorfismu

Důkaz

Z věty 33 víme, že pokud $\phi : G \to G'$ *je homomorfismus s jádrem* H*, pak* $\mu : G/H \to \phi[G]$*, kde* $\mu(gH) = \phi(g)$ *je isomorfismus.*
Z věty 35 víme, že $\gamma : G \to G/H$ *definované* $\gamma(g) = gH$ *je homomorfismus.*
Vidíme, že ϕ *se dá rozložit na* $\phi = \mu\gamma$*, kde* γ *je homomorfismus a* μ *je isomorfismus* G/H *s* $\phi[G]$.

Příklad 68

Určete jaká grupa (vzhledem k základní větě o konečně generovaných abelovských grupách) je isomorfní s faktorgrupou $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{0\} \times \mathbb{Z}_2)$.

Základní věta o homomorfismu

Příklad

Určete jaká grupa (vzhledem k základní větě o konečně generovaných abelovských grupách) je isomorfní s faktorgrupou $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{0\} \times \mathbb{Z}_2)$.

- Musíme najít surjektivní homomorfismus jehož jádrem je $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$
  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to (G, \cdot)$
- $(G, \cdot)$ je pak isomorfní s faktorgrupou
- Projekce $\pi_1 : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ daná předpisem
  $\pi_1(x, y) = x$
  je homomorfismus (surjektivní) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ na $\mathbb{Z}_4$ s jádrem $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$
- Faktorová grupa je tedy isomorfní se $\mathbb{Z}_4$

Normální podgrupy

Věta 37

Následující tři podmínky jsou ekvivalentní charakterizace normálních podgrup H grupy G.

1. $ghg^{-1} \in H$ *pro všechna* $g \in G$ *a* $h \in H$.
2. $gHg^{-1} = H$ *pro všechna* $g \in G$.
   Můžeme se setkat s touto podmínkou jako definicí normálních podgrup.
3. $gH = Hg$ *pro všechna* $g \in G$.
   Doposud jsme normální podgrupy definovali takto.

Důkaz

Uvažujme, že H *je podgrupa grupy* G *taková, že* $ghg^{-1} \in H$ *pro všechna* $g \in G$, $h \in H$. *Pak* $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\} \subseteq H$ *pro všechna* $g \in G$.
Musíme dokázat, že $H \subseteq gHg^{-1}$. *Nechť* $h \in H$. *Nahrazením* g *za* g^{-1} *v relaci* $ghg^{-1} \in H$ *dostaneme* $g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg = h_1$, *kde* $h_1 \in H$.
Následně $h = gh_1g^{-1} \in gHg^{-1}$

Normální podgrupy

Důkaz (Pokračování)

Předpokládejme, že $gH = Hg$ *pro všechna* $g \in G$.
Pak $gh = h_1 g$, *takže* $ghg^{-1} = h_1 \in H$ *pro všechna* $g \in G$ *a* $h \in H$.
Z již dříve ukázaného to znamená, že $gHg^{-1} = H$ *pro všechna* $g \in G$.
Naopak, pokud $gHg^{-1} = H$ *pro všechna* $g \in G$, *pak* $ghg^{-1} = h_1$, *takže* $gh = h_1 g \in Hg$ *a* $gH \subseteq Hg$.
Ale také platí, že $g^{-1}Hg = H$, *což nám dá* $g^{-1}hg = h_2$. *Takže* $hg = gh_2$ *a tedy* $Hg \subseteq gH$.

Příklad 69

Víme, že každá podgrupa H *abelovské grupy je normální. Ověřte podmínky v předchozí větě.*

Normální podgrupy

Příklad

Víme, že každá podgrupa H abelovské grupy je normální. Ověřte podmínky v předchozí větě.

- Když pro všechny $g \in G$, $h \in H$ máme, že $gh = hg$ (grupa G je komutativní)
- Pak $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$ a $h \in H$

Automorfismus

Definice

Isomorfismus $\phi : G \to G$ grupy G se sebou je **automorfismus** *grupy G.*
Automorfismus $i_g : G \to G$, kde $i_g(x) = gxg^{-1}$ pro všechna $x \in G$ se nazývá **vnitřní automorfismus** *G podle g.*
Aplikace i_g na x se nazývá **konjugace** *x podle g.*

Z věty 37 vyplývá, že $gH = Hg$ pro všechna $g \in G$, právě když $i_g[H] = H$ pro všechna $g \in G$, tedy když je H **invariantní** na všechny vnitřní automorfismy.
Co znamená, že je invariantní?

Je důležité si uvědomit, že $i_g[H] = H$ je rovnice množin. Tedy i_g může provést permutaci prvků na H

Vidíme, že normální podgrupy grupy H jsou invariantní na všechny vnitřní automorfismy.

Definice

Podgrupa K grupy G se nazývá **konjugovaná podgrupa** *H, pokud $K = i_g[H]$ pro nějaké $g \in G$.*

Normální podgrupy

Příklad 70

Triviální podgrupa $N = \{0\}$ *grupy* $\mathbb{Z}$ *je normální podgrupa. Vypočtěte* $\mathbb{Z}/\{0\}$.

Normální podgrupy

Příklad

Triviální podgrupa $N = \{0\}$ *grupy* $\mathbb{Z}$ *je normální podgrupa. Vypočtěte* $\mathbb{Z}/\{0\}$.

- $N = \{0\}$ má jeden prvek, všechny třídy rozkladu budou jednoprvkové
- Mají tvar $\{m\}$ pro $m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$
- Každé m je přejmenováno na $\{m\}$

Normální podgrupy

Příklad 71

Nechť $n \in \mathbb{N}$. *Množina* $n\mathbb{R} = \{nr | r \in \mathbb{R}\}$ *je podgrupa* $\mathbb{R}$ *se sčítáním. Je normální, protože je abelovská.*
Vypočtěte $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$.

Normální podgrupy

Příklad

Nechť $n \in \mathbb{N}$. *Množina* $n\mathbb{R} = \{nr | r \in \mathbb{R}\}$ *je podgrupa* $\mathbb{R}$ *se sčítáním. Je normální, protože je abelovská.*
Vypočtěte $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$.

- Zjevně platí, že $n\mathbb{R} = \mathbb{R}$
- Takže $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ má jen jeden prvek – samotnou podgrupu $n\mathbb{R}$

Normální podgrupy

Tvrzení

Pro libovolnou grupu G platí:
$G/\{e\} \simeq G$
$G/G \simeq \{e\}$

Je zřejmé z předchozích příkladů.

Pokud G je konečná a $N \neq \{e\}$, pak G/H má méně prvků než G (je menší grupa). Operace na G/N ale souvisí s operací na G (je definovaná přes operaci na reprezentantech tříd). Z vlastností G/NH můžeme odvozovat vlastnosti G a naopak.

Normální podgrupy

Tvrzení

Pokud je G konečná grupa a G/N má jen dva prvky, pak musí platit $|G| = 2|N|$. Každá podgrupa, která obsahuje právě polovinu prvků musí být normální podgrupa.

- Pro každý prvek $a \in G - N$ musí aN i Na obsahovat všechny prvky, které nejsou v N
- To znamená, že se levé a pravé třídy rovnají a je tedy normální

Příklad 72

Prozkoumejte chování S_n/A_n.

Normální podgrupy

Příklad

Prozkoumejte chování S_n/A_n.

- Pro A_n platí $|S_n| = 2|A_n|$, A_n je tedy normální podgrupa S_n
- S_n/A_n má řád 2
- Nechť σ je lichá permutace v S_n
  $S_n/A_n = \{A_n, \sigma A_n\}$
  A_n pojmenujme sudý
  σA_n lichý
- Operace je definovaná takto:

$$\text{(sudý)(sudý)} = \text{sudý} \qquad \text{(sudý)(lichý)} = \text{lichý}$$
$$\text{(lichý)(lichý)} = \text{sudý} \qquad \text{(lichý)(sudý)} = \text{lichý}$$

- Tato faktorgrupa odráží vlastnost skládání permutací

Normální podgrupy

Tvrzení

Opačný směr v Lagrangeově větě neplatí.
Lagrangeova věta: *Nechť* H *je podgrupa konečné grupy* G. *Pak* $|H|$ *je dělitel* $|G|$.

Příklad 73

Zkuste najít podgrupu grupy A_4 *(která má řád* 12*) řádu* 6.

Normální podgrupy

Příklad

Zkuste najít podgrupu grupy A_4 (která má řád 12) řádu 6.

- Předpokládejme, že taková podgrupa H existuje (H by jistě byla normální)
- Pak A_4/H by měla 2 prvky H a σH pro nějakou $\sigma \in A_4$
- V grupě řádu 2, součin každého prvku se sebou musí dát neutrální prvek: $HH = H$ a $(\sigma H)(\sigma H) = H$
- Pro každé $\alpha \in H$ musí platit $\alpha^2 \in H$, pro každé $\beta \in \sigma H$ musí platit $\beta^2 \in H$
  Každá druhá mocnina prvku z A_4 musí být v H
- V A_4 platí:
  $(1,2,3) = (1,3,2)^2$ a $(1,2,3)^2 = (1,3,2)$
  takže $(1,2,3)$ a $(1,3,2)$ jsou v H
- Ale stejně tak dostaneme, že $(1,2,4)$ a $(1,4,2)$ jsou v H
  $(1,3,4)$ a $(1,4,3)$ jsou v H
  $(2,3,4)$ a $(2,4,3)$ jsou v H
  a už teď máme 8 prvků a chtěli jsme řád 6

Faktorgrupy

Příklad 74

Vypočítejte faktorovou grupu $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$, *kde* $H = \langle (0,1) \rangle$.

Faktorgrupy

Příklad

Vypočítejte faktorovou grupu $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$*, kde* $H = \langle(0,1)\rangle$.

- $H = \langle(0,1)\rangle = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5)\}$
- $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6| = 24$, $|H| = 6$
- Každá třída bude mít 6 prvků
- $|(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H|$ má řád 4
- Protože je $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ abelovská, pak i $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$ je abelovská
- Třídy rozkladu:
  $H = (0,0) + H$, $(1,0) + H$, $(2,0) + H$, $(3,0) + H$
- Díky tomu, že je operace definovaná výběrem reprezentantů, je $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$ isomorfní s $\mathbb{Z}_4$.

Faktorgrupy

Věta 38

Nechť $G = H \times K$ *je direktní součin grup* H *a* K. *Pak* $\overline{H} = \{(h,e) | h \in H\}$ *je normální podgrupa grupy* G.
Také $G/\overline{H}$ *je přirozeně isomorfní s* K.
Podobně $G/\overline{K}$ *je přirozeně isomorfní s* H.

Důkaz

Uvažujme homomorfismus $\pi_2 : H \times K \to K$, *kde* $\pi_2(h,k) = k$.
Protože $Ker(\pi_2) = \overline{H}$, *vidíme, že* $\overline{H}$ *je normální podgrupa grupy* $H \times K$.
Protože π_2 *je surjektivní, ze základní věty o homomorfismu dostaneme* $(H \times K)/\overline{H} \simeq K$.

Faktorgrupy

Věta 39

Faktorgrupa cyklické grupy je cyklická.

Důkaz

Nechť G *je cyklická grupa s generátorem* a *a nechť* N *je normální podgrupa* G.
Tvrdíme, že aN *generuje* G/N. *Musíme vypočítat všechny mocniny* aN.
Ale to znamená vypočítat v G *všechny mocniny reprezentanta* a *a tyto mocniny dají všechny prvky v* G.
Mocniny aN *jistě dají všechny třídy* N *a tedy* G/N *je cyklická.*