Křivky

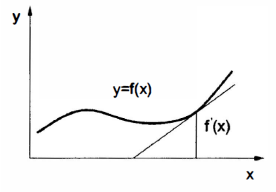
Křivky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

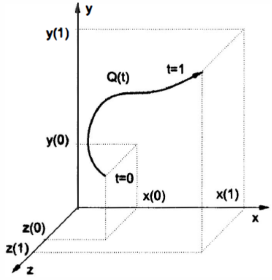
Zadání křivky

Explicitní $y = f(x)$



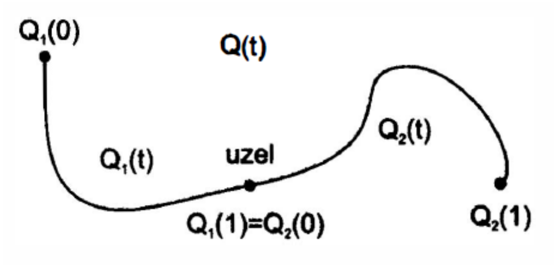
Implicitní $f(x, y) = 0$

Parametrické $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$



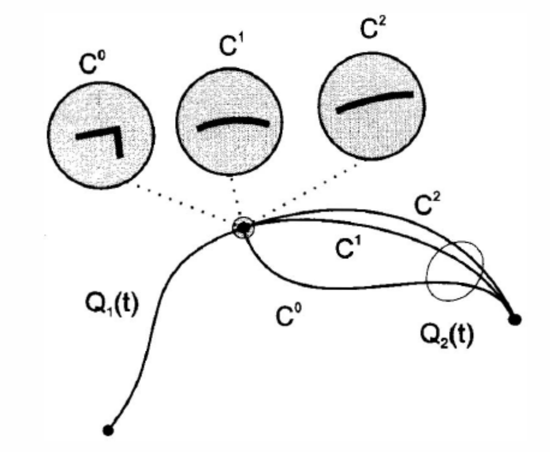
Parametrické zadání

- **Bodová rovnice** $Q(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
- **Vektorová rovnice** $\overrightarrow{q}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$
- **Polohový vektor** $\overrightarrow{q}(t) = Q(t) - [0, 0, 0]$
- **Tečný vektor** $\overrightarrow{q'}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- **Rovnice tečny** $P(u) = Q(t_0) + u\,\overrightarrow{q'}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- části křivky – segmenty



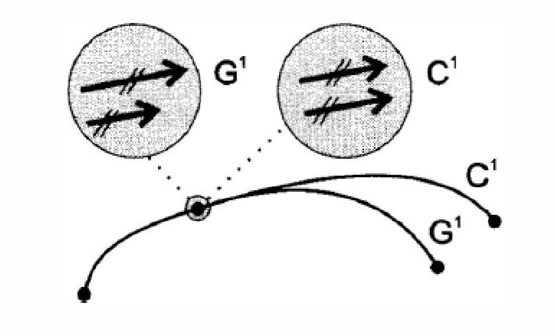
Parametrická spojitost

stupně n – C^n



Geometrická spojitost

stupně n – G^n



Modelování křivek

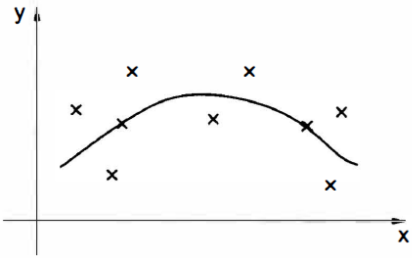
polynomiální křivky:

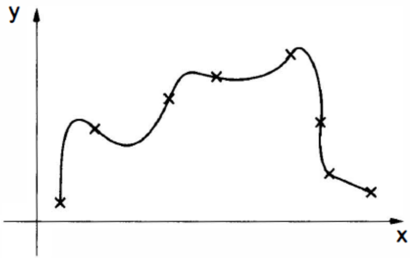
$Q_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$

Kubiky

řídící body

- aproximace
- interpolace





Zadání kubiky

parametricky:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$
$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

maticově:

$$Q(t) = TC = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

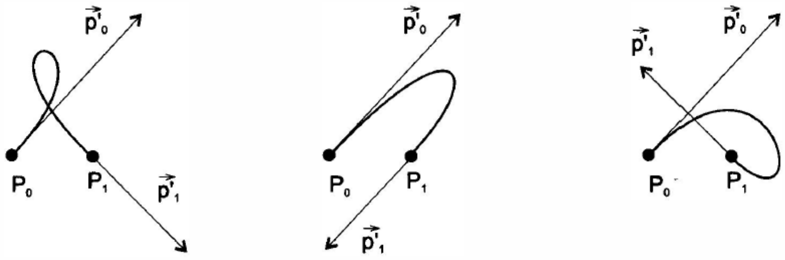
s geometrickými podmínkami

$$Q(t) = TCG = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

Interpolační křivky

- Hermitovské kubiky

Hermitovské kubiky



$$Q(t) = TCG = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \overrightarrow{p'}_0 \\ \overrightarrow{p'}_1 \end{bmatrix}$$

Aproximační křivky

- Beziérovy kubiky
- Coonsovy kubiky
- Spline křivky

Beziérovy křivky

$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i B_i^n(t)$

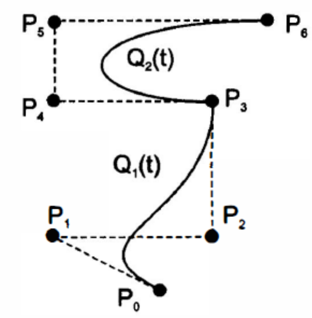
Bernsteinovy polynomy n-tého stupně – B_i^n

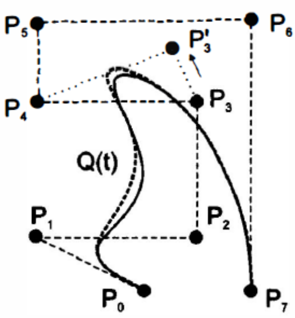
$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t^{n-i})$

$t \in < 0, 1 >$

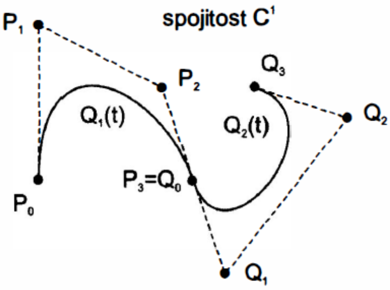
$i = 0, \ldots, n$

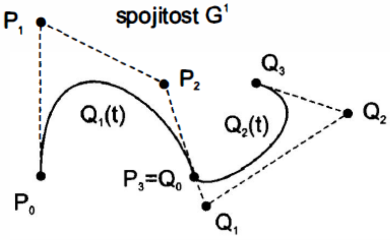
Beziérovy křivky





Beziérovy křivky

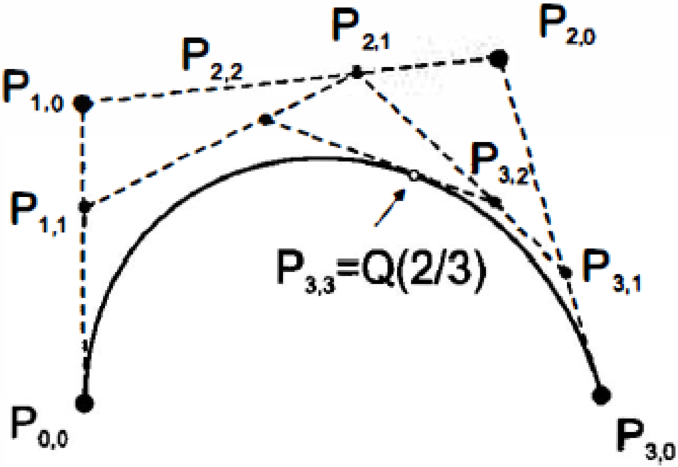




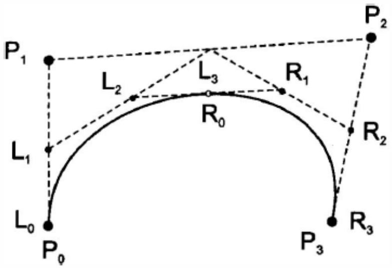
Vykreslení křivek

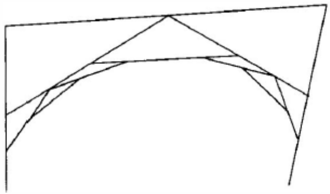
- naivní (neadaptivní)
- rekurzivní algoritmus de Castlejau

Algoritmus de Castlejau



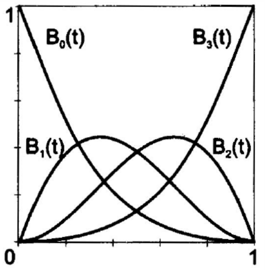
Algoritmus de Castlejau





Beziérovy kubiky

- 4 body P_0, P_1, P_2 a P_3
- $Q(t) = \sum_{i=1}^{3} P_i B_i(t)$
- $B_0(t) = (1-t)^3$
- $B_1(t) = 3t(1-t)^2$
- $B_2(t) = 3t^2(1-t)$
- $B_3(t) = t^3$
- maticový zápis:
  $Q(t) =$
  $$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

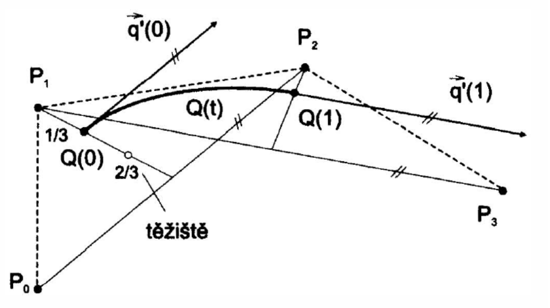


Coonsovy kubiky

Uniformní neracionální B-spline (B-spline)

- 4 body P_0, P_1, P_2 a P_3
- zápis:
  $Q(t) =$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$



Spline křivky

- po částech polynomiální křivka třídy C^n
- **Přirozený spline** – interpoluje své řídící body
- **B-spline kubiky** – nejsou přirozený spline – aproximační křivky
- uniformní neracionální B-spline
- neuniformní racionální B-spline – **NURBS**

Uniformní kubický B-spline

- Coonsův kubický B-spline
- vzniká navázáním Coonsových kubik
- 1. úsek: P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1} a P_i
- 2. úsek: P_{i-2}, P_{i-1}, P_i a P_{i+1}