Svazy

Algebra 2

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Svazy

Tvrzení

Každá uspořádaná množina, ve které existují $sup(a, b)$ *a* $inf(a, b)$ *pro každé dva prvky* a, b *je svaz (to už víme).*
Indukcí snadno ukážeme, že je-li $\langle A, \leq \rangle$ *svaz, pak existují* sup *a* inf *pro každou konečnou podmnožinu* $B \subseteq A$.

Tvrzení však nemůžeme jednoduše aplikovat na nekonečné podmnožiny.

Příklad 167

$\mathbb{N}$ *s relací dělitelnosti je svaz.* $sup(a, b) = a \vee b = lcm(a, b)$ *a* $inf(a, b) = a \wedge b = gcd(a, b)$.
gcd *i* lcm *dokážeme určit pro libovolné konečné podmnožiny, ale ne pro nekonečnou.*

Příklad 168

$\langle 2^M, \cap, \cup \rangle$. *Zde existují suprema i infima nekonečných podmnožin.*

Úplný svaz

Definice

Uspořádaná množina $\langle L, \leq\rangle$ je **úplný svaz**, *pokud pro každou $S \subseteq L$ existuje $supS$ a $infS$ v L.*

Tvrzení

Každý úplný svaz je svaz. **Proč?**

Tvrzení

Každý úplný svaz L má 1 0. **Jak vypadají?**

$1 = supL$, $0 = infL$

Úplný svaz

Příklad 169

Nechť L *je úplný svaz. Jak vypadá* $inf \emptyset$ *a* $sup \emptyset$*?*

Úplný svaz

Příklad

Nechť L je úplný svaz. Jak vypadá $inf\emptyset$ a $sup\emptyset$?

- supremum: Nejmenší prvek horního kuželu $\emptyset$
- Horní kužel je celý L, nejmenší prvek je 0.
- infimum: Největší prvek dolního kuželu $\emptyset$
- Dolní kužel je celý L, největší prvek je 1.

Úplný svaz

K definici úplného svazu nám stačí předpokládat jen existenci $infS$ pro všechny S.

Věta 104

Uspořádaná množina $\langle L, \leq\rangle$ v níž existuje $infS$ pro každou $S \subseteq L$. Pak $\langle L, \leq\rangle$ je úplný svaz.

Důkaz

Nechť $S \subseteq L$ a $U(S)$ je horní kužel množiny S. Zjevně $U(S) \neq \emptyset$.
Dle předpokladu má $U(S)$ infimum, označme si ho $x = infU(S)$.
Zjevně $s \leq x$ pro každé $s \in S$.
Je-li $s \leq y$ pro každé $s \in S$, pak $y \in U(S)$, tedy $x = infU(S) \leq y$, tedy $x = supS$.

Věta 105 (Duální k předchozí větě)

Uspořádaná množina $\langle L, \leq\rangle$ v níž existuje $supS$ pro každou $S \subseteq L$. Pak $\langle L, \leq\rangle$ je úplný svaz.

Úplný svaz

Příklad 170

Nechť $M \neq \emptyset$ *je množina. Ukažte, že množina všech ekvivalencí na* M *s* $\subseteq$ *je úplný svaz.*

Úplný svaz

Příklad

Nechť $M \neq \emptyset$ je množina. Ukažte, že množina všech ekvivalencí na M s $\subseteq$ je úplný svaz.

- Dle předchozí věty stačí ukázat, že pro libovolnou množinu I indexů a libovolnou množinu ekvivalencí E_i, $i \in I$ na M je $\bigcap\{E_i | i \in I\}$ opět ekvivalence

Izotonní zobrazení

Definice

Nechť $\langle A, \leq \rangle$, $\langle B, \leq \rangle$ *jsou uspořádané množiny. Zobrazení* $f : A \to B$ *je* **izotonní**, *pokud pro každé* $a, b \in A$ *platí*
$a \leq b$ *implikuje* $f(a) \leq f(b)$.

Izotonní zobrazení

Věta 106 (Věta o pevném bodě)

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ *je úplný svaz a* $f : L \to L$ *je izotonní zobrazení. Pak existuje prvek* $x \in L$ *takový, že* $f(x) = x$.
Takový prvek x *se nazývá* **pevný bod** *zobrazení* f.

Důkaz

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ *je úplný svaz a* $f : L \to L$ *je izotonní zobrazení a* $S = \{v | v \leq f(v)\}$. *Zjevně* $S \neq \emptyset$, *protože* $0 \in S$.
Položme $x = supS$. *Pak pro* $s \in S$ *je* $s \leq x$, *tedy* $s \leq f(s) \leq f(x)$. *Tj* $f(x)$ *je větší rovno každému* $s \in S$, *tedy i* x. *To znamená* $x \leq f(x)$.
Ale f *je izotonní, takže* $f(x) \leq f(f(x))$, *to znamená, že* $f(x) \in S$. *Ale* $x = supS$, *tedy* $f(x) = x$.

Ideál svazu

Definice

Nechť $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je svaz. Neprázdná podmnožina* $I \subseteq L$ *je* **ideál** *svazu* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$*, pokud*
$x, y \in I$ *pak* $x \vee y \in I$*,*
$x \in I$*,* $a \in L$ *pak* $x \wedge a \in I$*.*

Ideál svazu

Věta 107

Nechť $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je svaz,* $\mathcal{J}_0$ *je množina všech ideálů svazu* L *a* $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cup \varnothing$*. Pak* $\langle \mathcal{J}, \subseteq \rangle$ *je úplný svaz.*

Důkaz

Nechť $\mathbf{J} \subseteq \mathcal{J}_0$ *(nějaká množina ideálů svazu* L*).*
Je-li $\underline{\bigcap \mathbf{J} = \varnothing}$*, pak* $\bigcap J \in \mathcal{J}$*.*
Uvažujme $\underline{\bigcap \mathbf{J} = J \neq \varnothing}$*.*
Nechť $x, y \in J$ *a* $a \in L$*. Pro všechna* $I \in \mathbf{J}$ *máme* $x, y \in I$ *a tedy* $x \vee y \in I$ *a* $x \wedge a \in I$*. A tedy* $x \vee y \in J$ *a* $x \wedge a \in J$*.*
Takže J *je ideál. Tedy* $\bigcap \mathbf{J} = J \in \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}$*.*
Tedy pro každou $\mathbf{J}$ *je* $inf \mathbf{J} = \bigcap \mathbf{J}$ *prvkem* $\mathcal{J}$*.*
Dle věty 104 je $\langle \mathcal{J}, \subseteq \rangle$ *je úplný svaz.*

Ideál svazu

Lemma 7

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ *je svaz a* $a \in L$. *Pak* $I(a) = \{x \in L | x \leq a\}$ *je ideál svazu.*

Důkaz

Nechť $x, y \in I(a)$.
Pak $x \leq a$, $y \leq a$, *tedy dle věty 96 je* $x \vee y \leq a \vee a = a$, *tedy* $x \vee y \in I(a)$.
Je-li $b \in L$, *pak* $x \wedge b \leq x \leq a$, *tedy* $x \wedge b \in I(a)$.
To znamená, že $I(a)$ *je ideál svazu* L.

Ideál svazu

Věta 108

Každý svaz je isomorfní s podsvazem úplného svazu.

Důkaz

Nechť L *je svaz. Definujme zobrazení* $f : L \to \mathcal{J}$ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cup \emptyset$, *kde* $\mathcal{J}_0$ *je množina všech ideálů* L) *jako*
$f(a) = I(a)$.
Zjevně je f *injektivní, protože* $I(a) = I(b)$ *implikuje, že* $a = b$. *Tedy* f *je bijekce na množinu* $\{I(a) | a \in L\} \subseteq \mathcal{J}$. *Dokážeme, že* f *je homomorfismus svazů.*
Pro každé $a, b \in L$ *zřejmě platí* $a \wedge b \in I(a)$ a $a \wedge b \in I(b)$, *tedy* $a \wedge b \in I(a) \cap I(b)$, *tedy*
$a \wedge b \in I(a) \cap I(b) \Rightarrow I(a \wedge b) \subseteq I(a) \cap I(b)$.
Pokud $x \in I(a) \cap I(b)$, *tak* $x \leq a$, $x \leq b$, *tedy* $x \leq a \wedge b$ *z čehož plyne, že* $x \in I(a \wedge b)$, *tedy*
$I(a) \cap I(b) \subseteq I(a \wedge b)$.
Dohromady dostáváme
$f(a \wedge b) = I(a \wedge b) = I(a) \cap I(b) = f(a) \cap f(b)$.

Ideál svazu

Důkaz (Pokračování)

Podle věty 107 je $I(a) \vee I(b)$ *rovno průniku všech ideálů z* $\mathcal{J}$*, které obsahují* $I(a) \cup I(b)$*.*
Ale $I(a) \subseteq I(a \vee b)$ *a* $I(b) \subseteq I(a \vee b)$ *tedy* $I(a) \cup I(b) \subseteq I(a \vee b)$*, odtud plyne* $I(a) \vee I(b) \subseteq I(a \vee b)$*.*
Pokud existuje $I \in \mathcal{J}$ *takové, že* $I(a) \cup I(b) \subseteq I$*, pak* $a \in I$*,* $b \in I$ *tedy i* $a \vee b \in I$*, tj.* $I(a \vee b) \subseteq I$*. Neboli* $I(a) \vee I(b) = I(a \vee b)$*.*
Odtud $f(a \vee b) = I(a \vee b) = I(a) \vee I(b) = f(a) \vee f(b)$*.*
f *je tedy homomorfismus* L *do úplného svazu* $\langle \mathcal{J}, \subseteq \rangle$ *a tedy je to isomorfismus* L *na podsvaz* $\{I(a) | a \in L\}$*.*

Je-li svaz L konečný a I je jeho ideál, pak zjevně $I = I(a)$, kde $a = supI$. Tedy $\langle \{I(a) | a \in L\}, \subseteq \rangle$ je svaz všech ideálů konečného svazu L. Tedy zobrazení $f : a \to I(a)$ je isomorfismus L na $\langle \mathcal{J}, \subseteq \rangle$.

Distributivní a modulární nerovnost

Věta 109

Nechť L *je svaz. Pak pro každé* $a, b, c \in L$ *platí* **distributivní nerovnost**
$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,
$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Pro každé $a, b, c \in L$ *splňující* $a \leq c$ *platí* **modulární nerovnost**
$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

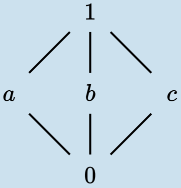
Důkaz

Distributivní nerovnost *Protože* $a \leq a \vee b$ a $a \leq a \vee c$, *platí také* $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
Dále $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ a $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$ *implikují* $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
Odtud dostaneme $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
Duálně se dokáže druhá distributivní nerovnost.
Modulární nerovnost
Nechť $a \leq c$. *Protože* $a \leq a \vee b$, *dostaneme* $a \leq (a \vee b) \wedge c$.
Podobně $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ a $b \wedge c \leq c$ *implikují* $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge c$, *tedy dohromady*
$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Distributivní a modulární nerovnost

Příklad 171 (Distributivní nerovnost)

Ověřte, zda pro následující svaz M_3 *(**diamant**) platí obrácená distributivní nerovnost.*



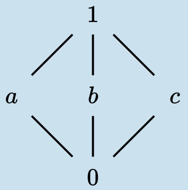
$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Distributivní a modulární nerovnost

Příklad (Distributivní nerovnost)

Ověřte, zda pro následující svaz M_3 *(**diamant**) platí obrácená distributivní nerovnost.*

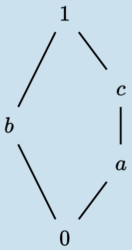


- $a \vee (b \wedge c) = a$
- $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1$
- a není větší nebo rovno 1
- $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0$
- $a \wedge (b \vee c) = a$
- 0 není větší rovno a
- Neplatí tedy ani jedna obrácená nerovnost.

Distributivní a modulární nerovnost

Příklad 172 (Modulární nerovnost)

*Ověřte, zda pro následující svaz N_5 (**pentagon**) platí obrácená modulární nerovnost.*

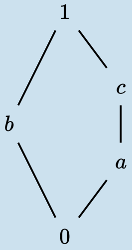


$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$

Distributivní a modulární nerovnost

Příklad (Modulární nerovnost)

*Ověřte, zda pro následující svaz N_5 (***pentagon***) platí obrácená modulární nerovnost.*



- $a \leq c$
- $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$
- $(a \vee b) \wedge c = c$
- a není větší nebo rovno c
- Neplatí obrácená nerovnost.

Distributivní a modulární svazy

Definice

Svaz L *je* **distributivní**, *pokud pro všechna* $a, b, c \in L$ *platí* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Definice

Svaz L *je* **modulární**, *pokud pro všechna* $a, b, c \in L$ *splňující* $a \leq c$ *platí* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Distributivní a modulární svazy

Věta 110

Svaz L je distributivní, právě když pro všechna $a, b, c \in L$ platí
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Důkaz

$\Rightarrow$ *Nechť L je distributivní. Pak platí*
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) =$
$(a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)) = a \vee (b \wedge c)$
a tedy platí rovnost z věty.
$\Leftarrow$ *Obrácené tvrzení se dokáže duálně.*

Distributivní a modulární svazy

Věta 111

Každý distributivní svaz je modulární.

Důkaz

Nechť L *je distributivní.* $a, b, c \in L$ *a platí* $a \leq c$. *Pak*
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$

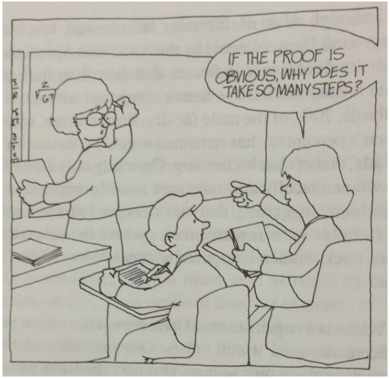
Distributivní a modulární svazy

Věta 112

Každý podsvaz a každý homomorfní obraz distributivního svazu je distributivní svaz.

Důkaz

Zjevné.



Distributivní a modulární svazy

Příklad 173

Ověřte, že následující svazy jsou distributivní:

1. *Každý řetězec.*
2. $\langle 2^M, \bigcup, \bigcap \rangle$, *pro* $M \neq \emptyset$.
3. *Svaz všech podgrup cyklické grupy* $\langle G, \circ \rangle$.

Distributivní a modulární svazy

Příklad

Ověřte, že následující svazy jsou distributivní:

3. *Svaz všech podgrup cyklické grupy.*

- Každá podgrupa $(A,\ B)$ cyklické grupy je normální. Platí tedy $A \wedge B = A \bigcap B$, $A \vee B = A \circ B$
- Stačí ověřit platnost $A \bigcap (B \circ C) \subseteq (A \bigcap B) \circ (A \bigcap C)$ dle věty 109
- Nechť $a \in A \bigcap (B \circ C)$, pak $a \in A$ a existují $b \in B$ a $c \in C$ takové, že $a = b \circ c$.
- Nechť d je generátor $\langle G, \circ \rangle$. Pak $b = d^m$ a $c = d^n$, pro nějaká $m, n \in \mathbb{Z}$. Tedy $a = d^{m+n}$.
- Nechť $m' = lcm(m+n, m)$ a $n' = lcm(m+n, n)$, pak $d^{m'} \in A \bigcap B$, $d^{n'} \in A \bigcap C$.
- Nechť $h = gcd(m', n')$. Pak $h = xm' + yn'$, pro některá $x, y \in \mathbb{Z}$. Tj. $d^h = (d^{m'})^x \circ (d^{n'})^y \in (A \bigcap B) \circ (A \bigcap C)$.
- Protože lcm i gcd splňují distributivní zákony, platí $h = gcd(m', n') = gcd(lcm(m+n, n), lcm(m+n, n)) = gcd(m+n, lcm(m, n)) = m+n$
- Tedy platí $d^h = d^{m+n} = a$, tj. $a \in (A \bigcap B) \circ (A \bigcap C)$

Distributivní a modulární svazy

Příklad 174

Ověřte, že následující svazy jsou modulární:

1. *Svaz normálních podgrup libovolné grupy* $\langle G, \circ \rangle$.
2. *Množina všech ideálů okruhu* R.

Podgrupa H grupy G je normální, pokud její levé a pravé třídy koincidují, tj. když $gH = Hg$ pro všechna $g \in G$.

Aditivní podgrupa N okruhu R splňující $aN \subseteq N$ a $Nb \subseteq N$ pro všechna $a, b \in R$ se nazývá ideál.

Distributivní a modulární svazy

Příklad

Ověřte, že následující svazy jsou modulární:

1. *Svaz normálních podgrup libovolné grupy* $\langle G, \circ \rangle$.

- Nechť A, B, C jsou normální podgrupy grupy $\langle G, \circ \rangle$ a nechť $A \subseteq C$.
- Zřejmě, $A \wedge B = A \bigcap B$, $A \vee B = A \circ B$.
- Stačí ověřit platnost $A \bigcap (B \circ C) \subseteq (A \bigcap B) \circ (A \bigcap C)$ dle věty 109
- Nechť $a \in (A \circ B) \bigcap C$, pak $a \in C$ a existují $d \in A$ a $b \in B$ takové, že $a = d \circ b$.
- Tedy $d \in A \subseteq C$, ale C je podgrupa, takže i $d^{-1} \in C$, tj. $b = d^{-1} \circ a \in C$.
- Tedy $b \in B \bigcap C$, tj. $d = a \circ b \in A \circ (B \bigcap C)$.

Distributivní a modulární svazy

Příklad

Ověřte, že následující svazy jsou modulární:

2. *Množina všech ideálů okruhu R.*

- Zjevně pro dva ideály I, J okruhu R je $I \bigcap J = inf(I, J)$ vzhledem k $\subseteq$.
- Dále $I + J = \{i + j | i \in I, j \in J\}$ je nejmenší ideál okruhu R obsahující současně I i J, tedy $I + J = sup(I, J)$.
- Množina všech ideálů je svaz, $\vee = +$, $\wedge = \bigcap$.
- Nechť I, J, K jsou ideály okruhu R takové, že $I \subseteq K$ a nechť $k \in (I + J) \bigcap K$.
- Pak $k \in K$, $k = i + j$, kde $i \in I$, $j \in J$.
- $I \subseteq K$, tedy $i \in K$, a také $j = k - i \in K$, tedy $j \in J \bigcap K$.
- Odtud $k = i + j \in I + (J \bigcap K)$
- Dokázali jsme inkluzi $(I + J) \bigcap K \subseteq I + (J \bigcap K)$.
- Platí i obrácená inkluze. Dle věty 109.

Distributivní a modulární svazy

Věta 113

Svaz L je modulární, právě když pro každé $a, b, c \in L$ platí
$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Důkaz

$\underline{\Rightarrow}$: *Nechť L je modulární. Jelikož $a \leq a \vee c = c'$, platí*
$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = a \vee (b \wedge c') = (a \vee b) \wedge c' = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

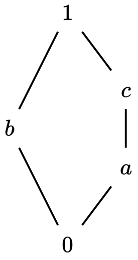
$\underline{\Leftarrow}$: *Nechť pro libovolné $a, b, c \in L$ platí identita z věty a $a \leq c$.*
Pak $a \vee c = c$, a tato identita přechází ihned v axiom z definice.

Distributivní a modulární svazy

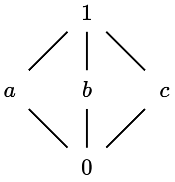
Věta 114 (Definice distributivních a modulárních svazů dle zakázaných podsvazů)

Svaz je modulární, právě když neobsahuje podsvaz isomorfní s N_5.

Svaz je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz isomorfní s N_5 *nebo* M_3.



N_5



M_3

Distributivní a modulární svazy

Důkaz

Svaz je modulární, právě když neobsahuje podsvaz isomorfní s N_5.

$\Rightarrow$:

Z věty 113 plyne, že každý podsvaz modulárního svazu je modulární.
Víme že modulární svaz nemůže obsahovat podsvaz izomorfní s N_5.

$\Leftarrow$:

Předpokládejme, že L není modulární. Pak existují prvky $a, b, c \in L$ takové, že $a < c$, ale $a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge c$.
Nechť $x = c \vee b$, $y = a \wedge b$. Pak z $a < c$ plyne $a \vee b \leq x$, $c \wedge b \geq y$.
Pokud by platilo $a \vee b < x$ nebo $c \wedge b > y$, tak se snadno dokáže obrácená modulární nerovnost.
Musí tedy platit $a \vee b = x$, $c \wedge b = y$. Odtud
$a \vee (b \wedge c) = a$, $(a \vee b) \wedge c = c$,
tedy $\{y, a, b, c, x\}$ tvoří N_5, kde x je největší prvek a y je nejmenší prvek.

Distributivní a modulární svazy

Důkaz

Svaz je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz isomorfní s N_5 nebo M_3.

$\Rightarrow$:

Z věty 112 plyne, že každý podsvaz distributivního svazu je distributivní, tedy nemůže obsahovat podsvaz izomorfní s M_3.

Dle věty 111 je distributivní svaz také modulární, tedy nemůže obsahovat podsvaz izomorfní s M_3.

Distributivní a modulární svazy

Důkaz (Pokračování)

Svaz je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz isomorfní s N_5 nebo M_3.

$\Leftarrow$: *Předpokládejme, že svaz L není distributivní.*
Pak buď není modulární, tj. obsahuje podsvaz izomorfní s N_5, jak bylo výše ukázáno, nebo je modulární, ale existují prvky $a, b, c \in L$ tak, že $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
Jsou-li kterékoliv dva z prvků a, b, c srovnatelné, pak z modularity L vyplývá platnost distributivity pro tyto tři prvky.
Tedy a, b, c jsou nesrovnatelné, tj. tvoří antiřetězec.
Položme $x = a \vee b \vee c$, $y = a \wedge b \wedge c$. Je-li např. $a \vee b < x$ nebo $a \wedge b > y$, pak tyto prvky a, b, c buď neporušují distributivní identitu, nebo prvky $\{y, a \wedge b, b, c, x\}$ nebo $\{y, b, a \vee b, c, x\}$ tvoří podsvaz isomorfní s N_5, což by byl spor s modularitou L.
Analogicky v případě $b \vee c < x$ nebo $b \wedge c > y$ nebo $a \vee c < x$ nebo $a \wedge c > y$.
Zbývá tedy $a \vee b = b \vee c = a \vee c = x$ a $a \wedge b = b \wedge c = a \wedge c = y$, tedy $\{y, a, b, c, x\}$ tvoří podsvaz izomorfní s M_3, kde y je nejmenší a x největší prvek.

Distributivní a modulární svazy

Důsledek 31

Svaz L je modulární tehdy a jen tehdy, když pro každé $x, y, z \in L$ takové, že $x \leq y$, platí: jestliže $x \wedge z = y \wedge z$ a $x \vee z = y \vee z$, pak $x = y$.

Svaz L je distributivní tehdy a jen tehdy, když pro každé $x, y, z \in L$ platí: jestliže $x \wedge z = y \wedge z$ a $x \vee z = y \vee z$, pak $x = y$.

Důkaz

Je-li L modulární, $x, y, z \in L$ a neplatí podmínka z důsledku, pak $\{x \wedge y \wedge z, x, y, z, x \vee y \vee z\}$ tvoří N_5 – spor.
Jestliže L není modulární, pak obsahuje podsvaz izomorfní s N_5, jehož prvky nesplňují podmínku z důsledku.
Je-li L distributivní, $x, y, z \in L$ a neplatí podmínka, pak $\{x \wedge y \wedge z, x, y, z, x \vee y \vee z\}$ tvoří N_5 nebo M_3, jehož prvky však nesplňují podmínku.

Distributivní a modulární svazy

Věta 115

Nechť L *je modulární svaz. Pak pro lib.* $a, b \in L$ *jsou intervaly* $[a, a \vee b]$, $[a \wedge b, b]$ *izomorfní podsvazy.*

Důkaz

Definujme zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ *předpisem* $f(x) = x \wedge b$.
Pak pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ *je* $a \leq a \vee y \leq a \vee b$, *tedy* $a \vee y \in [a, a \vee b]$, *přičemž dle modulární rovnosti platí* $f(a \vee y) = (y \vee a) \wedge b = y \vee (a \wedge b) = y$.
Tedy f *je surjekce. Nechť* $x, x' \in [a, a \vee b]$. *Jestliže* $f(x) = f(x')$, *pak* $x \wedge b = x' \wedge b$. *Tedy dle modulární rovnosti dostaneme*
$x = (a \vee b) \wedge x = a \vee (b \wedge x) = a \vee (b \wedge x') = (a \vee b) \wedge x' = x'$, *tedy* f *je injektivní.*
Platí $f(x \wedge x') = x \wedge x' \wedge b = (x \wedge b) \wedge (x' \wedge b) = f(x) \wedge f(x')$.
Dále, protože $x \wedge b \leq b$ *a* $a \leq x$, $a \leq x' \leq a \vee b$, *dostaneme opakovaným použitím modulární rovnosti* $f(x) \vee f(x') = (x \wedge b) \vee (x' \wedge b) = ((x \wedge b) \vee x') \wedge b = ((x \wedge b) \vee a \vee x') \wedge b = (((a \vee b) \wedge x) \vee x') \wedge b = (x' \vee x) \wedge (a \vee b) \wedge b = (x \vee x') \wedge b = f(x \vee x')$.
Tedy f *je bijektivní homomorfismus (izomorfismus).*

Komplementární svaz

Definice

Nechť L je svaz s 0 a 1. Prvek $b \in L$ se nazývá **komplement** *prvku $a \in L$, pokud $a \vee b = 1$, a $a \wedge b = 0$.*

Svaz L s 0 a 1 je **komplementární**, *má-li každý prvek aspoň jeden komplement.*

Je-li ve svazu L prvek a komplementem prvku b, pak b je komplementem a a říkáme tedy, že a, b jsou **(vzájemně) komplementární**.

Příklad 175

Nechť L je svaz s 0 a 1. Má prvek 0 komplement?

Komplementární svaz

Příklad

Nechť L je svaz s 0 a 1. Má prvek 0 komplement?

- Komplementem prvku 0 je prvek 1.
- Platí to i naopak, komplementem 1 je prvek 0.

Příklad 176

Nechť C_n je n-prvkový řetězec. Je tento svaz komplementární?

Komplementární svaz

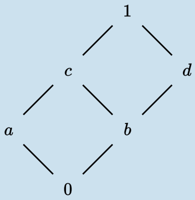
Příklad

Nechť C_n je n-prvkový řetězec. Je tento svaz komplementární?

- 0 a 1 jsou jediné prvky, které mají komplementy.
- Komplementární je jen pro $n = 2$.

Příklad 177

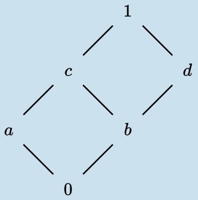
Je následující svaz komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.



Komplementární svaz

Příklad

Je následující svaz komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.



- Komplementární jsou prvky 0 a 1
- Komplementární jsou prvky a a d
- Prvky b a c nemají komplement

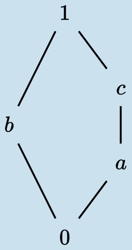
Příklad 178

Je svaz N_5 komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.

Komplementární svaz

Příklad

Je svaz N_5 komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.



- Prvek b má dva komplementy – a a c
- Prvek c má jeden komplement – b
- Prvek a má jeden komplement – b

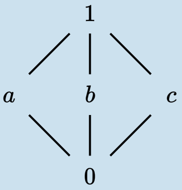
Příklad 179

Je svaz M_3 komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.

Komplementární svaz

Příklad

Je svaz M_3 komplementární? Určete komplementy jednotlivých prvků.



- Prvek a má dva komplementy – b a c
- Prvek b má dva komplementy – a a c
- Prvek c má dva komplementy – a a b

Komplementární svaz

Definice

Nechť L *je svaz a* $c \in [a,b] \subseteq L$. *Prvek* $d \in [a,b]$ *se nazývá* **relativní komplement** *prvku* c *v intervalu* $[a,b]$, *jestliže platí*
$c \vee d = b$ a $c \wedge d = a$.

Svaz L *je* **relativně komplementární**, *má-li každý prvek* $c \in [a,b]$ *pro libovolný interval* $[a,b]$ *aspoň jeden relativní komplement v* $[a,b]$.

Tvrzení

Je-li L *svaz s* 0 *a* 1 *relativně komplementární, je i komplementární, protože* $L = [0,1]$ *a komplement prvku* $a \in L$ *je tedy relativní komplement prvku a v intervalu* $[0,1]$.

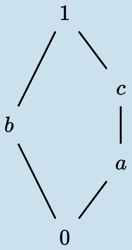
Existují však relativně komplementární svazy, které nemají 0 *či* 1.

Příklad 180

Je svaz N_5 *relativně komplementární?*

Příklad

Je svaz N_5 relativně komplementární?



- Uvažujeme-li interval $[0, c]$,pak pro prvek $a \in [0, c]$ neexistuje relativní komplement.

Komplementární svaz

Věta 116

Nechť L je distributivní svaz s 0 a 1. Pak každý prvek $a \in L$ má nejvýše jeden komplement.

Důkaz

Nechť $b, c \in L$ jsou komplementy $a \in L$. Pak

$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$

$c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee (c \wedge b) = b \wedge c.$

Tedy $b = c$.

Komplementární svaz

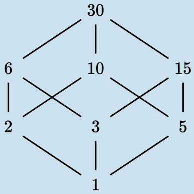
Definice

Svaz L s 0 a 1 je jednoznačně komplementární, má-li každý prvek $a \in L$ právě jeden komplement.

V jednoznačně komplementárním svazu budeme komplement prvku x označovat symbolem x'.

Příklad 181

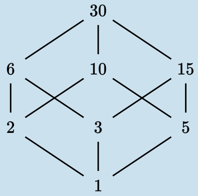
Následující svaz je jednoznačně komplementární. Označte jednotlivé komplementy.

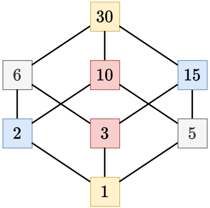


Komplementární svaz

Příklad

Následující svaz je jednoznačně komplementární. Označte jednotlivé komplementy.





Komplementární svaz

Důsledek 32

Každý komplementární distributivní svaz je jednoznačně komplementární.

Toto tvrzení lze např. pro konečné svazy obrátit (pro nekonečné ne, ale je to složité dokázat).

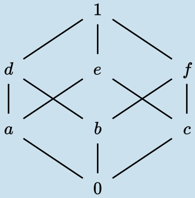
Atomický svaz

Definice

*Prvek a svazu L s 0 je **atom**, pokud $0 < a$, a pro každé $x \in L$ splňující $0 < x \leq a$ platí $x = a$.*
Jinak řečeno atom je prvek $a \in L$ takový, že $0 \prec a$.
*Svaz L s 0 je **atomický**, pokud pro každý prvek $b \in L$, $b \neq 0$ existuje atom $a \in L$ tak, že $a \leq b$.*

Příklad 182

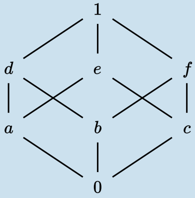
Najděte atomy v následujícím svazu.



Atomický svaz

Příklad

Najděte atomy v následujícím svazu.



- Svaz má 3 atomy – a, b a c
- Ostatní prvky se dají vyjádřit pomocí těchto prvků
- $d = a \vee b$, $e = a \vee c$, $f = b \vee c$
- **Jak vyjádříme** 0 **a** 1**?**

Atomický svaz

Věta 117

Každý jednoznačně komplementární atomický svaz je distributivní.

Důkaz

Vynechán.

Důsledek 33

Každý konečný jednoznačně komplementární svaz je distributivní.

Důkaz

Je-li L konečný svaz, $0 < x \in L$, pak buď x je atom, nebo existuje jen konečně mnoho prvků $z_1, \ldots, z_n$ takových, že
$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < x$.
Pak z_1 je atom. Tedy L je atomický a důsledek plyne ihned z věty 117.

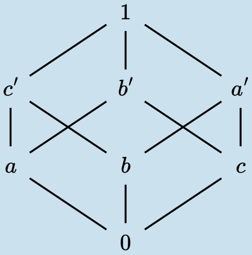
De Morganovy zákony

Definice

V jednoznačně komplementárním svazu L platí **De Morganovy zákony***, pokud pro všechna $x, y \in L$ platí*
$(x \vee y)' = x' \wedge y'$ *a* $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

Příklad 183

Ověřte platnost De Morganových zákonů následujícího svazu.



De Morganovy zákony

Věta 118

Nechť L je jednoznačně komplementární svaz. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. *pro každé $x, y \in L$ platí $x \leq y \Rightarrow x' \geq y'$*
2. *v L platí De Morganovy zákony*

Důkaz

$\underline{1 \Rightarrow 2}$:

Nechť $x, y \in L$. Pak dle 1 platí:

$x \leq x \vee y \Rightarrow x' \geq (x \vee y)'$, $y \leq x \vee y \Rightarrow y' \geq (x \vee y)'$ *tedy* $x' \wedge y' \geq (x \vee y)'$.

Dále $x' \geq x' \wedge y' \Rightarrow x = (x')' \leq (x' \wedge y')'$, $y' \geq x' \wedge y' \Rightarrow y = (y')' \leq (x' \wedge y')'$

tedy $x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$.

Dostáváme tedy rovnost. Druhý De Morganův zákon se dokáže duálně.

$\underline{2 \Rightarrow 1}$:

Nechť $x \leq y$. Pak $y = x \vee y$, dle De Morganova zákona platí

$y' = (x \vee y)' = x' \wedge y'$, *tedy* $y' \leq x'$.

Booleovy svazy

Definice

Booleovský svaz *je komplementární distributivní svaz.*

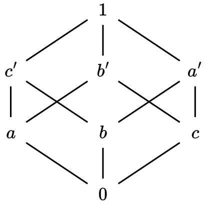
Příklad 184

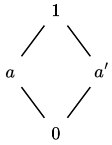
Uveďte příklad nějakého Booleova svazu.

Booleovy svazy

Příklad

Uveďte příklad nějakého Booleova svazu.

- Svaz $\langle 2^M, \cup, \cap \rangle$ pro $M \neq \emptyset$, kde pro každou $X \subseteq M$ je $X' = M - X$.
- 

- 

Booleovy svazy

Důsledek 34

Pro konečný svaz L jsou následující výroky ekvivalentní:

1. *L je booleovský*
2. *L je jednoznačně komplementární*

Důkaz

Z věty 116 víme, že každý booleovský svaz je jednoznačně komplementární.
Z důsledku 33 víme, že každý konečný jednoznačně komplementární svaz je booleovský.

Booleovy svazy

Věta 119

V každém booleovském svazu platí De Morganovy zákony.

Důkaz

Nechť L *je booleovský svaz.*
Dle věty 116 je L *jednoznačně komplementární.*
Nechť $a, b \in L$ *takové, že* $a \leq b$.
Pak $a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$,
tedy $a' = 0 \vee a' = (a \wedge b') \wedge a' = (a \vee a') \wedge (b' \vee a') = 1 \wedge (b' \vee a') = b' \vee a'$,
tedy $a' \geq b'$ *a dle věty 118 platí v* L *De Morganovy zákony.*

Komplementární svazy

Věta 120

Každý komplementární modulární svaz L je relativně komplementární.

Důkaz

Nechť $a \in [x, y] \subseteq L$ a b je komplement prvku a v L. Položme
$c = (y \wedge b) \vee x$.
Z modularity a ze vztahu $x \leq y$ plyne $c = y \wedge (b \vee x)$, a dále
$c \wedge a = [(x \vee b) \wedge y] \wedge a = (x \vee b) \wedge (y \wedge a) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x \vee 0 = x$
$c \vee a = [(y \wedge b) \vee y] \vee a = (y \wedge b) \vee (x \vee a) = (y \wedge b) \vee a = y \wedge (b \vee a) = y \wedge 1 = y$
Tedy c je relativní komplement prvku a v intervalu $[x, y]$.

Komplementární svazy

Důsledek 35

Každý booleovský svaz je relativně komplementární.

Věta 121

Svaz L je distributivní právě, když každý prvek $a \in L$ má v libovolném intervalu nejvýše jeden relativní komplement.

Svaz L je modulární právě, když každý prvek $a \in L$ v libovolném intervalu nemá dva srovnatelné relativní komplementy.

Důkaz

Plyne přímo z předchozí věty.